A. HOLLINGER

ALGEBRĂ

VII

A. HOLLINGER
PROFESOR EMERIT AL R.P.R.

ALGEBRA

MANUAL PENTRU CLASA a VII-a

EDITURA DE STAT DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI— 1962

Capitolul I

EXPRESII ALGEBRICE

1. Reprezentarea numerelor prin litere. În aritmetică, pentru a exprima unele proprietăţi ale operaţiilor cu numere, sau unele reguli, am reprezentat numerele prin litere. Vom arăta aceasta prin cîteva exemple.

a) Se știe că:

$$3+5=5+3; \quad 4+7=7+4 \quad \text{ș.a.m.d.}$$

Adunarea este comutativă. Acest lucru este adevărat nu numai în cazul acestor numere, 3 și 5 sau 4 și 7, ci oricare ar fi termenii adunării. Pentru a exprima aceasta, se scrie:

$$a+b=b+a.$$

Aici literele a și b reprezintă numere oarecare (naturale sau fracţionare).

b) Se ştie că, pentru a înmulţi două fracţii, înmulţim numărătorii între ei şi numitorii între ei.

De exemplu:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}.$$

Dacă notăm prima fracţie cu $\frac{a}{b}$, iar a doua cu $\frac{c}{d}$, regula înmulţirii fracţiilor se scrie:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Aici, literele a, b, c, d reprezintă numere naturale oarecare (b şi d fiind diferite de zero).

c) Se ştie că, pentru a afla aria unui dreptunghi, trebuie să înmulţim baza dreptunghiului cu înălţimea sa. Această regulă se exprimă, scurt, astfel:

$$A = b \cdot i,$$

unde A, b şi i sînt numere. De exemplu, pentru $b = 5$(m), $i = 3$(m), formula dă: $A = 5 \cdot 3 = 15$ (m²).

Reprezentarea numerelor prin litere este folositoare, pentru că permite exprimarea sub o formă foarte scurtă.

2. **Semnele operaţiilor.** Cînd numerele se reprezintă prin litere, operaţiile se exprimă prin semnele cunoscute din aritmetică $+$, $-$, $\cdot$, $:$, linia de fracţie ş.a.m.d. Astfel $a - b$ arată că se scade numărul b din numărul a, $\sqrt{a}$ arată că se scoate rădăcina pătrată din numărul a ş.a.m.d. Numai în cazul înmulţirii este o deosebire: de cele mai multe ori nu se pune punct între factori. Astfel, $3a$ înseamnă: 3 înmulţit cu a; xy înseamnă x înmulţit cu y. Nu se poate renunţa la punctul de înmulţire cînd ambii factori sînt reprezentaţi prin cifre, căci 35 înseamnă: treizeci şi cinci, nu 3 înmulţit cu 5*. Cînd un produs conţine un factor numeric, acel factor se scrie înaintea celorlalţi. De exemplu, se scrie $3x$, nu $x3$.

---

* La numere mixte, fracţia se scrie lîngă numărul întreg; de exemplu: $3\frac{1}{2}$. Aici alăturarea celor două numere reprezintă o adunare; $3\frac{1}{2}$ reprezintă suma $3 + \frac{1}{2}$.

3. Probleme cu date în litere. *Deasupra unui butoi gol, care are o capacitate de 240 l, sînt două robinete. Unul dintre robinete dă 7 l apă pe minut, iar celălalt dă 5 l apă pe minut. În cît timp se va umple butoiul dacă deschidem amîndouă robinetele?*

Rezolvare. 1) Cîtă apă dau cele două robinete într-un minut?

$$(7 + 5)\,l.$$

2) În cîte minute se strîng în butoi 240 l de apă?

În $$t = \frac{240}{7 + 5} \text{ minute.}$$

Aceasta este o *formulă numerică.* Ea ne arată ce operaţii trebuie să facem cu numerele date în problemă, pentru a o rezolva.

Acum este foarte uşor să obţinem răspunsul:

$$7 + 5 = 12; \quad 240 : 12 = 20.$$

Butoiul se umple în 20 de minute.

În rezolvarea acestei probleme, ca şi a oricărei alte probleme, deosebim două părţi: *a)* judecata, care duce la formula numerică şi *b)* efectuarea operaţiilor. Dintre aceste părţi, prima este cea principală. Dacă se schimbă numai datele, putem spune că problema nu s-a schimbat. În tabelul de mai jos se văd diferite exemple:

Capacitatea butoiului:	200	160	250
Debitul robinetului I:	8	7	12
Debitul robinetului II:	4	3	4
Rezultatul:	$\frac{200}{8+4}$	$\frac{160}{7+3}$	$\frac{250}{12+4}$.

În locul formulelor (expresiilor) din ultimul rînd, care diferă de la un exemplu la altul, putem scrie:

$$t = \frac{\text{capacitatea butoiului}}{\text{debitul primului robinet} + \text{debitul robinetului al doilea}}$$

Expresia devine mai scurtă dacă reţinem numai iniţialele. Notăm cu C numărul care reprezintă capacitatea butoiului, cu D debitul primului robinet, şi cu d debitul robinetului al doilea. Obţinem:

$$t = \frac{C}{D + d}.$$

Aceasta este o *expresie algebrică*. Ea exprimă (arată) ce operaţii trebuie să facem cu numerele C, D şi d, pentru a rezolva problema următoare:

Deasupra unui butoi gol, care are o capacitate de C *litri, sînt două robinete. Unul dintre robinete dă* D *litri de apă pe minut, iar celălalt dă* d *litri pe minut. În cît timp se va umple butoiul, dacă deschidem amîndouă robinetele?*

Această problemă conţine toate problemele din tabelul de mai sus, iar expresia (formula)

$$t = \frac{C}{D + d}$$

ne dă soluţiile tuturor acestor probleme. N-avem decît să înlocuim literele prin numere corespunzătoare şi să efectuăm operaţiile:

În prima problemă, avem:

$$C = 240;\ D = 7;\ d = 5;\ \text{deci: } t = \frac{240}{7 + 5} = 20.$$

Pentru $C=200$; $D=8$; $d=4$, avem:

$$t=\frac{200}{8+4}=\frac{200}{12}=16\frac{2}{3} \text{ ş.a.m.d.}$$

Cînd datele unei probleme sînt exprimate prin litere, se spune că problema este pusă sub forma *generală*. O astfel de problemă cuprinde un număr mare de probleme, care se obţin înlocuind literele prin diferite numere. Aceste probleme sînt probleme *particulare*.

4. **Expresii algebrice.** Rezolvînd diferite probleme, în care unele dintre date sau toate datele sînt exprimate prin litere, se obţin diferite expresii, ca de exemplu:

$$a+b-c; \; 5a-2; \; \frac{5a+3b+c}{4} \text{ ş.a.m.d.}$$

Acestea sînt *expresii algebrice*. Fiecare din ele indică una sau mai multe operaţii cu numerele pe care le conţine, numerele fiind reprezentate prin cifre sau prin litere.

Probleme cu conţinut cu totul diferit pot duce la aceeaşi expresie algebrică. În algebră se lucrează cu expresii algebrice şi, de cele mai multe ori, nu se arată de la ce problemă provin.

Literele care intră într-o expresie algebrică pot lua diferite valori; ele reprezintă nişte *variabile*. În cazul contrar, ele reprezintă nişte *constante*. De exemplu, în expresia $5a$, 5 este o constantă, iar a este o variabilă.

Cînd, într-o expresie algebrică, înlocuim literele prin numere şi facem calculele indicate, obţinem *valoarea numerică* a acelei expresii.

Mai sus am aflat valoarea numerică a expresiei $t = \frac{C}{D+d}$ pentru $C = 240$, $D = 7$, $d = 5$ și pentru $C = 200$, $D = 8, d = 4$.

EXERCIȚII

Exprimarea prin litere a unor relații cunoscute din aritmetică

1. Să se scrie, notînd numerele naturale prin litere, că: *a)* adunarea numerelor naturale este comutativă; *b)* înmulțirea numerelor naturale este comutativă; *c)* adunarea fracțiilor este comutativă $\left(\text{fracțiile se vor nota cu } \frac{a}{b} \text{ și } \frac{c}{d}\right)$; *d)* înmulțirea fracțiilor este comutativă.

2. Să se scrie cu semne matematice că: *a)* dacă înmulțim ambii termeni ai unei fracții cu 2, obținem o fracție egală cu cea dată $\left(\text{fracția dată se va nota cu } \frac{a}{b}\right)$; *b)* dacă înmulțim ambii termeni ai unei fracții cu 3, obținem o fracție egală cu cea dată; *c)* la fel, dacă-i înmulțim cu un număr oarecare (numărul oarecare se va nota cu n).

3. Să se scrie cu semne matematice că: *a)* pentru a aduna două fracții care au același numitor, se adună numărătorii și se lasă numitorul neschimbat (cele două fracții se vor nota cu $\frac{a}{n}$ și $\frac{b}{n}$; de ce s-a pus la ambele fracții ca numitor aceeași literă?); *b)* pentru a scădea dintr-o fracție o altă fracție care are același numitor, se scade al doilea numărător din primul și se lasă

numitorul neschimbat; *c)* pentru a înmulţi o fracţie cu un număr întreg, înmulţim numărătorul ei cu întregul; *d)* pentru a împărţi o fracţie printr-un număr întreg, înmulţim numitorul ei cu întregul; *e)* pentru a înmulţi două fracţii, înmulţim numărătorii între ei şi numitorii între ei; *f)* pentru a împărţi o fracţie printr-o altă fracţie, înmulţim prima fracţie cu inversa fracţiei a doua; *g)* dacă la numărătorul unei fracţii oarecare adunăm 1, obţinem o fracţie mai mare decît fracţia de la început; *h)* dacă adunăm la numitorul unei fracţii oarecare numărul 1, obţinem o fracţie mai mică decît fracţia de la început; *i)* ce se întîmplă, dacă scădem din numărătorul sau din numitorul unei fracţii numărul 1?

4. Să se afle x din proporţiile următoare:

$$\frac{x}{3}=\frac{5}{6};\quad \frac{x}{a}=\frac{2}{3};\quad \frac{x}{b}=\frac{a}{4};\quad \frac{x}{a}=\frac{b}{c}.$$

5. Se dau proporţiile:

$$\frac{a}{2}=\frac{5}{b};\quad \frac{a}{b}=\frac{x}{y};\quad \frac{a}{3}=\frac{4}{7}.$$

Să se scrie pentru fiecare din ele că produsul mezilor este egal cu produsul extremilor.

Probleme cu date în litere

6. Am a lei şi mai primesc 5 lei. Cît am acum? Dar dacă în loc de 5 lei, primesc b lei? Cît îmi rămîne dacă în loc să capăt 5 lei cheltuiesc 3 lei? Dar dacă cheltuiesc b lei?

7. Într-o şcoală, în clasa a VII-a A sînt x elevi, în clasa a VII-a B sînt y elevi, iar în clasa a VII-a C sînt z elevi. Cîţi elevi sînt în cele trei clase?

8. *a)* Gheorghe are x lei, iar Mihai are cu 12 lei mai puţin. Cîţi lei are Mihai?

b) Un muncitor a făcut luni x piese, marţi y piese, iar miercuri z piese. Cîte piese a făcut în aceste trei zile?

c) O maşină parcurge în prima oră x km, în ora a doua y km, iar în ora a treia z km. Cîţi kilometri a parcurs în aceste trei ore?

9. Ionel are a ani, iar sora lui mai mare, Viorica, are b ani. Cu cît este mai mare Viorica decît Ionel? Cu cît este mai mic Ionel decît Viorica?

10. *a)* Am a lei, mai primesc b lei şi cheltuiesc c lei. Cît îmi rămîne?

b) Am a lei, cheltuiesc b lei, apoi mai cheltuiesc 3 lei. Cît îmi rămîne?

11. *a)* La o întreprindere s-au prevăzut pentru anul 1961 la cheltuieli a lei şi s-au cheltuit numai b lei. Ce economii s-au făcut? *b)* S-au prevăzut a lei cheltuieli, în prima jumătate a anului se economisesc b lei, iar în jumătatea a doua, c lei. Cît s-a cheltuit?

12. Ion are a lei, Nicolae are cu b lei mai mult ca Ion, iar Viorica are cu 3 lei mai puţin ca Nicolae. Cît are Viorica?

13. Dintr-un ogor al unei gospodării agricole colective care are a ha, o combină seceră în prima zi b ha, iar în ziua a doua c ha. Cîte hectare mai rămîn de secerat?

14. După plan, o lucrare urma să coste a lei. Prin grija muncitorilor şi tehnicienilor s-au economisit materiale în valoare de x lei, iar la manoperă s-a făcut o economie de y lei. Cît a costat lucrarea?

15. Un copil are acum 12 ani. Ce vîrstă a avut cu n ani în urmă? Ce vîrstă va avea acest copil peste n ani?

16. Să se compună cîte o problemă care să ducă la formulele:

a) $x + y$; *b)* $x - y$; *c)* $x + y + 3$;
d) $x - y + 10$; *e)* $x - a + b$; *f)* $x - a - b$.

17. O echipă este formată din 15 muncitori. La o lucrare, 3 din ei economisesc cîte a lei, 5 economisesc cîte b lei, iar 7, cîte c lei. Să se afle totalul economiilor realizate de această echipă.

18. Într-o şcoală sînt a clase, în fiecare clasă sînt b bănci, iar în fiecare bancă stau c elevi. Cîţi elevi are această şcoală?

19. Într-o livadă sînt a rînduri de cîte b meri, fiecare măr dă în medie x kg mere, iar kilogramul de mere se vinde cu y lei. Cu cît s-a vîndut toată cantitatea de mere?

20. Să se compună o problemă care să ducă: *a)* la expresia abc; *b)* la expresia $abcd$.

21. Cît costă $\frac{3}{4}$ kg carne, dacă un kilogram de carne costă: *a)* 12 lei; *b)* 15 lei; *c)* x lei.

22. Cît fac: *a)* 3% din 458?; *b)* 5% din n?; *c)* $p\%$ din 530?; *d)* $p\%$ din S?

23. La o cooperativă s-au adus într-o zi 8 lăzi de cîte b kg mere. Pînă seara s-au vîndut 15 kg de mere. Cîte kilograme de mere au rămas?

Aceeaşi întrebare, dacă: *a)* s-au adus a lăzi de cîte 10 kg şi s-au vîndut 24 kg; *b)* s-au adus 12 lăzi de cîte b kg şi s-au vîndut c kg; *c)* s-au adus a lăzi de cîte b kg şi s-au vîndut c kg.

Să se compună o problemă a cărei rezolvare să ducă la formula: $ab - c$.

24. O echipă de zidari urma să facă a m³ de zidărie pe zi. Ea depăşeşte norma în fiecare zi cu cîte 6 m³. Cîţi metri cubi de zidărie face echipa în 5 zile? Aceeaşi întrebare dacă: *a)* norma este de 24 m³ de zidărie pe zi şi echipa depăşeşte zilnic norma cu x m³; *b)* norma este de a m³ zidărie pe zi şi echipa depăşeşte zilnic norma cu x m³.

25. O sumă de x lei se împarte la 3 persoane. Cît revine fiecăreia? Aceeaşi întrebare, dacă x lei se împart la: *a)* 5 persoane; *b)* n persoane.

26. Într-un trimestru, un elev a fost ascultat de trei ori la oral şi a căpătat notele a,b,c. Ce medie îi iese la oral? Aceeaşi întrebare, dacă elevul a fost ascultat de 4 ori şi a căpătat notele a,b,c,d.

27. Un muncitor primeşte un premiu de a lei. Din aceşti bani el depune la C.E.C. 100 de lei, iar restul îi împarte în părţi egale la cei 3 copii ai săi. Cît revine fiecărui copil? Aceeaşi întrebare, dacă: *a)* premiul este de 350 de lei, depune la C.E.C. b lei şi sînt 4 copii; *b)* premiul este de a lei, depune la C.E.C. b lei şi sînt n copii.

Să se compună o problemă care să ducă la formula $\frac{a-b}{n}$.

28. Un muncitor trebuia să facă a piese. El lucrează 3 zile făcînd cîte x piese pe zi. În cîte zile va face restul pieselor, dacă în zilele următoare face cîte 6 piese pe zi? Aceeaşi întrebare, dacă: *a)* el trebuia să facă 100 de piese şi a lucrat b zile, făcînd cîte x piese pe zi, iar în zilele următoare face cîte 5 piese pe zi; *b)* el trebuia să facă a piese şi a lucrat b zile făcînd cîte x piese pe zi, iar în zilele următoare face cîte n piese pe zi.

29. O echipă formată din elevi şi eleve a cules 5 kg de căpşuni. Cîte kilograme de căpşuni a cules

în medie fiecare, dacă echipa este formată din: *a)* 8 băieţi şi b fete; *b)* a băieţi şi 6 fete; *c)* a băieţi şi b fete?

30. O gospodărie agricolă colectivă cultivă grîu pe trei tarlale: una de a ha, a doua, de b ha, şi a treia, de c ha. Toată recolta este de n kg grîu. Care este producţia medie la hectar?

31. O cisternă are două robinete. Printr-un robinet intră a litri de benzină pe minut, iar printr-un alt robinet se scurg b litri benzină pe minut ($a>b$; debitele se presupun constante). Se întreabă: *a)* cu cît creşte într-un minut cantitatea de benzină din cisternă; *b)* în cît timp se strîng în cisternă 500 litri de benzină?

Capitolul II

NUMERE POZITIVE ŞI NEGATIVE

5. **Introducerea numerelor negative.** Cu ajutorul numerelor se poate răspunde precis la întrebarea: cît? de exemplu: cîţi elevi sînt în clasă? 42 de elevi. Cît de mare este această cameră? Ea are 30 m².

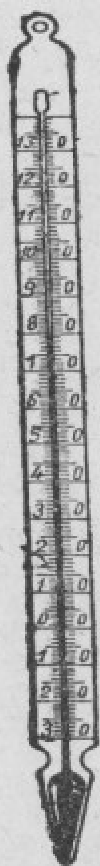


Fig. 1. Termometru gradat

Pentru cele mai multe mărimi, răspunsul la întrebarea cît? este complet, dacă este format dintr-un număr urmat de indicaţia unităţii de măsură. Sînt însă cazuri cînd aceasta nu este suficient.

Vom lua ca prim exemplu *temperatura*. Ea se măsoară prin înălţimea coloanei de mercur a termometrului, socotită de la punctul zero, unitatea de măsură fiind gradul. O afirmaţie ca: termometrul arată 5° nu are înţeles deplin. Trebuie să se adauge dacă sînt 5° *deasupra* punctului zero, sau *dedesubt*. În primul caz se spune că sînt $+5°$ (plus 5 grade), iar în cazul al doilea se spune că sînt $-5°$ (minus 5 grade). Sînt posibile temperaturi de $-10°$; $-5\frac{1}{2}°$; $-15{,}8°$ ş.a.m.d.

Numerele pe care le cunoaştem din aritmetică, cum ar fi: $1; 2; 5; 10; 100; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}$; 7,8 ş.a.m.d., adică numerele întregi (naturale) şi fracţionare, ne dau posibilitatea să exprimăm diferite temperaturi, cînd mercurul din termometru se ridică deasupra punctului zero. Pentru cazurile cînd mercurul coboară sub zero, se folosesc numere noi, cum ar fi:

$$-1; -2; -5; -10; -100; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{5}; -7{,}8$$

ş.a.m.d.

Aceste numere se numesc numere *negative*. Ele se scriu cu ajutorul cifrelor, ca şi numerele cunoscute din aritmetică, dar cu semnul — (minus) în faţă. Pentru a deosebi mai bine numerele cunoscute din aritmetică de aceste numere noi, se pune uneori în faţa lor semnul + (plus). În loc de 1 se scrie $+1$, în loc de 2 se scrie $+2$, în loc de $\frac{3}{5}$ se scrie $+\frac{3}{5}$ ş.a.m.d. Aceste numere se numesc numere *pozitive*. Numărul zero nu este nici pozitiv, nici negativ.

6. **Numere raţionale.** Numerele naturale (1,2,3 ş.a.m.d.) şi fracţiile (de exemplu: $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$, 0,75 ş.a.m.d.) sînt numere pozitive. Fiecărui număr pozitiv îi corespunde un număr negativ (numărului 1 îi corespunde numărul -1, lui 2 îi corespunde -2, lui $\frac{3}{4}$ îi corespunde $-\frac{3}{4}$ ş.a.m.d.). Numerele întregi şi fracţionare, pozitive şi negative şi numărul zero se numesc numere *raţionale*.

Cîte două numere ca $+1$ și -1, $+2$ și -2, $+\frac{3}{5}$ și $-\frac{3}{5}$ se numesc *opuse*. Fiecare din ele este opusul celuilalt. De exemplu, -1 este opusul lui $+1$, și $+1$ este opusul lui -1.

7. **Observări.** 1) Cînd un număr este reprezentat printr-o literă și în fața literei nu se găsește nici un semn, *nu* înseamnă că acel număr este neapărat pozitiv. De exemplu, litera *a* poate reprezenta numărul -7.

2) În urma introducerii numerelor negative, expresia *număr întreg* capătă un sens mai larg decît în aritmetică. În aritmetică se înțelege prin numere întregi numai numerele naturale (1,2, 3,...). Acum cunoaștem și numere întregi negative -1, -2, -3 ș.a.m.d. Numerele naturale sînt numere întregi și *pozitive*.

8. **Mărimi care se socotesc în două sensuri.** Temperatura se exprimă uneori printr-un număr pozitiv, alteori printr-un număr negativ, pentru că ea se socotește în *două sensuri* (în sus și în jos), de la un punct anumit (punctul zero) numit *origine*.

Există și alte mărimi care se socotesc în două sensuri.

1) Variația mărimilor. Mărimile pot varia în două sensuri, pornind de la o situație dată (origine). *Creșterea* se exprimă printr-un număr *pozitiv*, iar *descreșterea* printr-un număr *negativ*.

2) Sumele de bani pe care urmează să le primească cineva se exprimă prin numere *pozitive*; sumele de bani pe care urmează să le plătească cineva se exprimă prin numere *negative*. De exemplu: $+3\,000$ de lei înseamnă că avem de primit 3 000 de lei, iar $-3\,000$ de lei înseamnă că avem de plătit 3 000 de lei. Numerele care în registrele de contabilitate se trec în coloana *credit*, pot fi considerate ca *pozitive*, iar cele care se trec în coloana *debit*, ca *negative*.

3) *Timpul*. Timpul se socotește de la un moment anumit, luat ca origine, iar ca sens pozitiv se ia sensul de la trecut

spre viitor. Unui moment de după originea timpului îi corespunde un număr pozitiv, iar unui moment dinainte de originea timpului îi corespunde un număr negativ. În istorie, se ia ca origine a timpului începutul erei noastre. Sîntem în anul +1962, adică în anul 1962 e.n., fundarea Romei s-a produs în anul —753, adică în anul 753 î.e.n.

4) *Longitudinea* și *latitudinea*. Pentru longitudini se ia ca origine primul meridian, iar ca sens pozitiv sensul de la vest spre est. Longitudinea *estică* se exprimă printr-un număr *pozitiv*, iar cea *vestică* printr-un număr *negativ*. Pentru latitudini se ia ca origine ecuatorul și ca sens pozitiv sensul de la sud spre nord. Latitudinea *nordică* se exprimă printr-un număr *pozitiv*, iar cea *sudică* printr-un număr *negativ*.

5) *Altitudini*. Se ia ca origine nivelul mării, iar ca sens pozitiv sensul de jos în sus.

6) Cînd asupra unui punct O acționează două forțe care au aceeași direcție, dar sensuri contrare, ca în figura 2, vom exprima una din ele, de exemplu forța care trage spre dreapta, printr-un număr pozitiv, iar cealaltă, printr-un număr negativ.

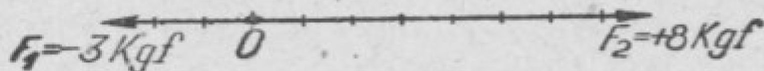


Fig. 2

7) Există două feluri de electricitate: pozitivă (sticloasă) și negativă (rășinoasă).

Foarte multe mărimi se pot exprima numai prin numere pozitive, nu și prin numere negative. Așa sînt, de exemplu, prețurile mărfurilor. Afirmația: „Această carte costă —4 lei" nu are nici un sens. La fel sînt: ariile, volumele etc.

9. Numerele negative ca rezultat al scăderii. La aritmetică se învață că un număr mai mare nu poate fi scăzut dintr-un număr mai mic. Totuși sînt cazuri cînd trebuie să facem astfel de scăderi.

E x e m p l e. *a)* Termometrul arată la prînz 15° și pînă seara temperatura scade cu 5°. Cîte grade arată termometrul seara? Răspuns: 15—5 = = 10. Seara, termometrul arată 10°.

b) La prînz, termometrul arată 2° şi pînă seara temperatura scade cu 5°. Cîte grade arată termometrul seara? Şi acum să facem o scădere, şi anume:

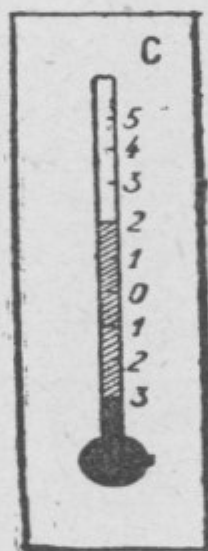


Fig. 3

$$2 - 5 = ?$$

Dacă mercurul coboară cu 5°, el ajunge la — 3° (fig. 3). Deci:

$$2 - 5 = -3.$$

De data aceasta, a trebuit să scădem un număr mai mare dintr-un număr mai mic. Operaţia a devenit posibilă datorită introducerii numerelor negative.

10. **Axa numerelor.** Pe o dreaptă (fig.4) luăm un punct oarecare O ca origine şi un sens pozitiv, de exemplu sensul de la stînga la dreapta. Apoi luăm un segment oarecare ca unitate şi purtăm pe dreapta noastră, la dreapta lui O, segmentele OA, AB, BC ş.a.m.d., egale cu unitatea. Numărului 1 îi corespunde astfel punctul A, numărului 2 — punctul B, numărului 3 — punctul C ş.a.m.d. Continuînd astfel, facem ca fiecărui număr întreg şi pozitiv (natural) să-i corespundă un punct de pe dreapta noastră. Fracţiilor pozitive le corespund puncte situate între aceste puncte. Fie, de exemplu, numărul $2\frac{3}{7}$. Purtăm pe

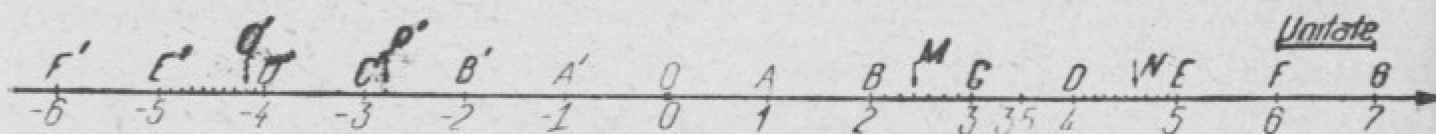


Fig. 4

dreaptă două segmente egale cu unitatea şi în continuare, $\frac{3}{7}$ din unitate. Punctul M astfel obţinut

corespunde numărului $2\frac{3}{7}$. Punctul N corespunde numărului 4,6.

Procedînd în acelaşi fel la stînga punctului O, obţinem punctele care corespund numerelor negative. Numărului — 1 îi corespunde punctul A', numărului — 2 îi corespunde punctul B' ş.a.m.d. Numărului zero îi corespunde punctul O.

În felul acesta, facem ca fiecărui număr raţional să-i corespundă un punct pe dreaptă. Această dreaptă se numeşte *axa numerelor*. Cuvîntul axă exprimă faptul că pe această dreaptă s-a ales un sens pozitiv. Numerele care corespund punctelor se numesc *abscisele* punctelor. De exemplu, punctul A are abscisa 1, punctul C' are abscisa — 3. Uneori punctele se numesc după abscisele lor. Se spune: punctul 3, punctul 0, punctul — 5 ş.a.m.d.

11. Valoarea absolută a unui număr. Cînd este vorba de o mărime care se măsoară în două sensuri, uneori nu se ţine seamă de sensul ei.

E x e m p l u. În cazul celor două forţe din figura 2, dacă vrem să ştim care din ele este mai mare, nu comparăm numerele — 3 şi + 8, ci + 3 şi + 8. Forţa îndreptată spre dreapta este mai mare. Pentru compararea mărimilor celor două forţe s-a înlocuit numărul — 3 cu + 3. Spunem că am luat *valoarea absolută* a numărului — 3.

Valoarea absolută a unui număr pozitiv este chiar acel număr; valoarea absolută a unui număr negativ este opusul lui; valoarea absolută a lui zero este zero.

E x e m p l e. Valoarea absolută a numărului 3 (sau+3) este 3. Valoarea absolută a numărului—3 este tot 3.

Valoarea absolută a unui număr se notează închizînd numărul între două bare. De exemplu, valoarea absolută a numărului *a* se scrie: $|a|$. Deci, $|+3| = 3$ sau $+3$; $|-3| = 3$ sau $+3$.

În loc de valoare absolută, se spune şi *modul*. De exemplu, modulul lui -5 este 5, modulul lui $+6$ este 6.

12. **Ordonarea numerelor raţionale.** Pentru a şti care dintre două numere raţionale este mai mare, ţinem seama de poziţia lor pe axa numerelor:

Dintre două numere raţionale, numărul situat la dreapta este mai mare, iar cel situat la stînga este mai mic.

Prin dreapta şi stînga se înţelege dreapta şi stînga cititorului.

De aici rezultă că:

1) *Din două numere pozitive, numărul care are valoarea absolută mai mare este mai mare.*

Exemple. $7 > 5$; $3,5 > 3$ (fig. 4).

Această definiţie este potrivită. În adevăr, cînd termometrul arată $+7°$, e mai cald decît atunci cînd arată $+5°$.

2) *Din două numere negative, numărul care are valoarea absolută mai mare este mai mic.*

Exemple. $-2 < -1$; $-5 > -6$ (fig. 4).

Şi această definiţie este potrivită. În adevăr, cînd termometrul arată $-6°$ este mai puţin cald decît atunci cînd arată $-5°$.

3) *Orice număr pozitiv este mai mare decît orice număr negativ.*

Exemple. $1 > -20$; $-3 < 8$.

De exemplu, cînd termometrul arată $+1°$ (sau orice alt număr de grade deasupra lui zero) este mai cald decît atunci cînd arată $-20°$ (sau orice alt număr de grade sub zero).

4) *Numărul zero este mai mare decît orice număr negativ şi mai mic decît orice număr pozitiv.*

Exemple. $-2<0$; $3>0$.

De exemplu, cînd termometrul arată 0°, este mai cald decît atunci cînd arată un număr oarecare de grade sub zero şi mai puţin cald decît atunci cînd arată un număr oarecare de grade deasupra lui zero.

Pentru a arăta că un număr x este pozitiv, se scrie: $x > 0$; pentru a arăta că x este negativ, se scrie: $x<0$.

13. **Operaţii cu numere raţionale.** La aritmetică s-a învăţat cum se fac operaţiile cu numere pozitive. Cu numere raţionale *oarecare*, pozitive sau negative, se pot face aceleaşi operaţii.

Semnele operaţiilor sînt cele obişnuite. Fiecare dintre semnele + şi — capătă astfel două înţelesuri. Astfel + 3, de exemplu, înseamnă: 1) a aduna numărul 3 cu un alt număr; 2) numărul pozitiv + 3. Tot aşa — 3 înseamnă: 1) a scădea numărul 3 din alt număr; 2) numărul negativ — 3.

Pentru a nu scrie două semne unul după altul, semnul numărului împreună cu cifra sau cifrele respective se închid între paranteze. Deci, suma numerelor + 8 şi —2 se scrie: $(+8) + (-2)$; diferenţa aceloraşi numere se scrie: $(+8)-(-2)$. În mod analog se procedează la înmulţire şi la împărţire.

14. **Adunarea.** *Un om merge pe o şosea pornind dintr-un punct O. El face întîi a paşi şi ajunge într-un punct M; de aci mai face b paşi şi ajunge astfel într-un punct N. Cîţi paşi a făcut omul pentru a ajunge din punctul O în punctul N?*

Trebuie să examinăm cazurile: cînd ambele numere (a şi b) sînt pozitive, cînd ambele numere sînt negative şi cînd unul din cele două numere

este negativ, iar celălalt este pozitiv. Alegem pe şosea ca sens pozitiv sensul de la stînga la dreapta. Dacă omul face un număr oarecare de paşi la *dreapta*, numărul corespunzător va fi *pozitiv*, iar dacă omul merge spre *stînga*, numărul va fi *negativ*.

De exemplu:

$+$ 5 paşi înseamnă 5 paşi la dreapta;

— 5 paşi înseamnă 5 paşi la stînga.

Cînd a şi b sînt numere pozitive, răspunsul este foarte uşor (v. fig. 5); omul trebuie să facă

$$a + b \text{ (paşi)}.$$

Tabelul de la pagina 23 reprezintă diferite cazuri posibile. În coloanele 3 şi 4 sînt trecute diferite valori pentru a şi b, în coloana 5, se dă rezultatul

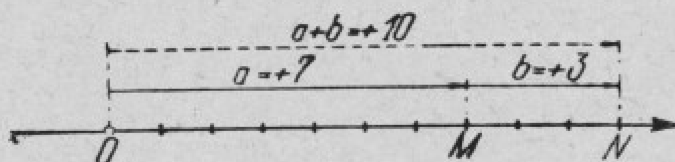


Fig. 5

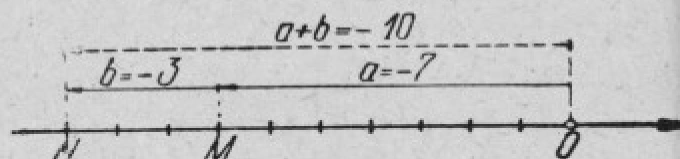


Fig. 6

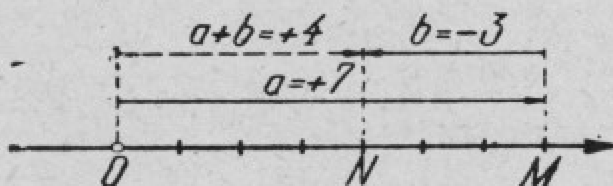


Fig. 7

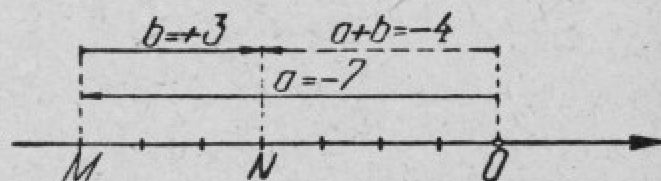


Fig. 8

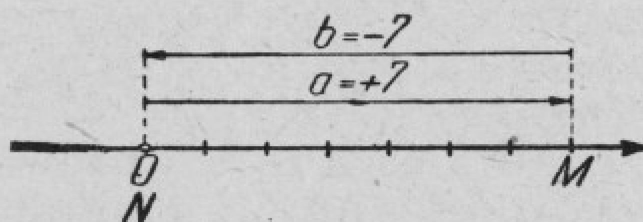


Fig. 9

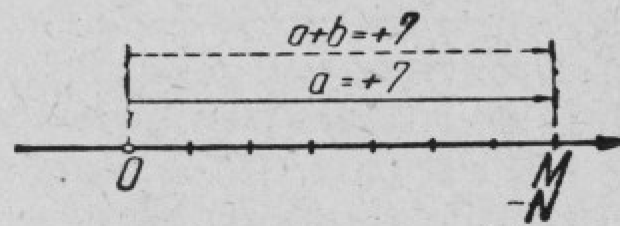


Fig. 10

1	2	3	4	5	6	7
	Fig.	Pași de la O la M; $a=$	Pași de la M la N; $b=$	Pași de la O la N	$a+b=c$	Cum am calculat suma
1	5	+7	+3	10 pași la dreapta, adică: + 10	$(+7)+(+3)=+10$	Am adunat valorile absolute, și în fața rezultatului am pus semnul +
2	6	−7	−3	10 pași la stînga, adică: − 10	$(-7)+(-3)=-10$	Am adunat valorile absolute și am pus în fața rezultatului semnul −
3	7	+7	−3	4 pași la dreapta, adică: + 4	$(+7)+(-3)=+4$	Am scăzut valoarea absolută mai mică din valoarea absolută mai mare, iar în fața rezultatului am pus semnul + (semnul numărului care are valoarea absolută mai mare).
4	8	−7	+3	4 pași la stînga, adică: − 4	$(-7)+(+3)=-4$	Am scăzut valoarea absolută mai mică din valoarea absolută mai mare, iar în fața rezultatului am pus semnul − (semnul numărului care are valoarea absolută mai mare).
5	9	+7	−7	nici un pas	$(+7)+(-7)=0$	Suma este egală cu zero.
6	10	+7	0	7 pași la dreapta, adică: + 7	$(+7)+0=+7$	Suma este egală cu primul termen.

dedus din figură, iar în coloana 6 se arată cum se face operaţia cu numerele respective.

Cazurile 1 şi 2 se înţeleg uşor. În cazurile 3 şi 4 am pus în faţa rezultatului semnul numărului care are valoarea absolută mai mare, din motivul următor: dacă se fac mai mulţi paşi spre dreapta, rezultatul este o deplasare spre dreapta, iar dacă se fac mai mulţi paşi spre stînga, rezultatul este o deplasare spre stînga.

Regulă. 1) *Pentru a aduna două numere care au acelaşi semn, adunăm valorile lor absolute şi punem în faţa rezultatului semnul pe care-l au cele două numere.*

2) *Pentru a aduna două numere care au semne diferite, scădem valoarea absolută mai mică din valoarea absolută mai mare, iar în faţa rezultatului punem semnul numărului care are valoarea absolută mai mare.*

3) *Suma a două numere opuse este zero.*

4) *Cînd un termen al adunării este zero, suma este egală cu celălalt termen.*

Exemple. $(-12)+(+8)=-4;$

$$(+2{,}75)+(-3{,}20)=-0{,}45;$$

$$\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=\left(-\frac{9}{24}\right)+\left(-\frac{20}{24}\right)=-\frac{29}{24}=-1\frac{5}{24}.$$

15. **Sumă algebrică.** O sumă de doi sau mai mulţi termeni, indiferent de semnele lor, este o sumă algebrică*.

Pentru a simplifica scrisul, semnul + dintre termeni, care arată adunarea, nu se scrie.

De exemplu, suma numerelor —6, —2, —5, +3 şi +4 se scrie: —6 —2 —5 +3 +4.

---

* Este o urmare a unor denumiri mai vechi, după care numerele pozitive şi negative se numeau *numere algebrice*.

Adunarea se exprimă prin simpla alăturare a termenilor.

Prin această scriere simplificată, parantezele dispar. Se spune că *desfacem* parantezele, după regula următoare:

Cînd în fața unei paranteze se găsește semnul +, lăsăm la o parte semnul + și paranteza și luăm numărul din paranteză cu semnul său.

Pentru a calcula suma de mai sus, zicem*: —6—2 face —8;... —5 face —13;...+3 face —10; ...+4 face —6. Rezultatul este —6.

Cînd primul termen al unei sume algebrice este pozitiv, semnul + din fața lui se poate neglija. De exemplu, în loc de $+5-6$, se poate scrie $5-6$.

16. **Proprietățile sumei algebrice.** 1) *Într-o sumă algebrică putem schimba după voie ordinea termenilor; suma rămîne neschimbată (comutativitate).* (Se înțelege că mutăm termenii cu semnele lor.) De exemplu:

$$-3+15-6=+6;\quad +15-3-6=+6;\quad -6+15-3=+6.$$

2) *Într-o sumă algebrică, putem înlocui doi sau mai mulți termeni prin suma lor algebrică; suma rămîne neschimbată (asociativitate).*

De exemplu: Fie suma

$$6-2-5+8=7.$$

Dacă înlocuim termenii -5 și $+8$ prin suma lor, care este $+3$, obținem:

$$6-2+3=7,$$

adică aceeași sumă.

---

* Pentru începător este bine să se dea numerelor o interpretare concretă. De exemplu: în cazul sumei $-6-2-5+3+4$, se poate zice: 6 pași spre stînga și 2 pași spre stînga fac 8 pași spre stînga... și cu 5 pași spre stînga fac 13 pași spre stînga ș.a.m.d.

Dacă înlocuim termenii — 2 şi — 5 prin suma lor, obţinem:

$$6-7+8=7,$$

deci tot aceeaşi sumă.

17. Aplicaţie. Fie de calculat suma:

$$-18-35+21-64+28-34.$$

Dacă facem operaţiile în ordinea în care sînt scrise, obţinem pe rînd rezultatele: -53, -32, -96, -68, -102.

Este mai uşor să procedăm astfel: mutăm toţi termenii pozitivi în faţă (folosim proprietatea 1):

$$+21+28-18-35-64-34.$$

Înlocuim termenii pozitivi prin suma lor şi termenii negativi prin suma lor (folosim proprietatea 2):

$$+49-151=-102.$$

În practică, termenii nu se mai transcriu; se ajunge imediat la $+49-151$.

18. Scăderea. *A scădea un număr b dintr-un număr a înseamnă a găsi un număr c care, adunat cu b, să dea a:*

$$a-b=c, \text{ dacă } a=b+c.$$

De exemplu: $7-3=4$, deoarece $3+4=7$.

Această definiţie este valabilă şi în cazul cînd numerele a şi b sînt numere raţionale oarecare, pozitive sau negative.

1) Fie, de exemplu, scăderea:

$$a-(+3).$$

Trebuie să găsim un număr care, adunat cu $+3$, să dea a. Acest număr este $a-3$, căci, dacă la $a-3$ adunăm $+3$, obţinem:

$$a-3+3=a.$$

Deci:

$$a-(+3)=a-3.$$

Au dispărut semnul — și paranteza, iar în locul lui $+3$ a apărut -3, adică am schimbat semnul lui $+3$.

Exemple.

$$+10-(+4)=+10-4=+6;$$
$$+10-(+13)=+10-13=-3;$$
$$-8-(+6)=-8-6=-14.$$

2) Luăm cazul cînd scăzătorul este negativ, de exemplu:

$$a-(-3).$$

Trebuie să găsim un număr care, adunat cu -3, să dea a. Acest număr este $a+3$, căci:

$$a+3-3=a.$$

Deci:

$$a-(-3)=a+3.$$

Şi acum, semnul din faţa parantezei și paranteza au dispărut, iar în locul lui -3 a apărut $+3$, adică am schimbat semnul lui -3.

Exemple.

$$+8-(-4)=8+4=12;$$
$$-9-(-7)=-9+7=-2.$$

3) În ambele cazuri, am transformat diferenţa neefectuată într-o sumă algebrică, desfăcînd paranteza după regula următoare:

Dacă în faţa unei paranteze se găseşte semnul —, lăsăm la o parte semnul — şi paranteza şi luăm numărul din paranteză cu semn schimbat.

19. **Observări.** 1) Am văzut că $a - (+3) = a - 3$. Expresia $a - 3$, la rîndul ei, reprezintă suma $a + (-3)$. Deci:

$$a - (+3) = a + (-3).$$

În mod analog:

$$a - (-3) = a + (+3).$$

Pentru a scădea + 3, adunăm — 3, iar pentru a scădea — 3, adăugăm + 3.

Pentru a scădea un număr, se adună opusul lui.

În felul acesta, scăderea se înlocuieşte printr-o adunare.

2) Ştim că, într-o sumă algebrică, semnele + şi — sînt privite ca semnele numerelor, iar semnul adunării se subînţelege, nu se scrie. Acum putem privi lucrurile şi altfel. O expresie ca 8 — 3, de exemplu, se poate înţelege în două feluri: *a)* din numărul pozitiv 8 se scade numărul pozitiv 3; *b)* numărul pozitiv 8 se adună cu numărul negativ —3. În ambele cazuri se obţine acelaşi rezultat. Dacă expresia se ia în sensul al doilea, ca sumă algebrică, scăderea dispare, ea fiind înlocuită printr-o adunare.

3) Adunarea şi scăderea numerelor pozitive şi negative se pot explica şi astfel:

Într-un registru figurează diferite sume de bani, în două coloane, ca în schema de mai jos. Numerele din prima coloană sînt pozitive, ele reprezintă sume de bani pe care urmează să le primim; numerele din coloana a doua sînt negative, ele reprezintă sume de bani pe care urmează să le plătim. Dacă adăugăm un număr oarecare în prima coloană, de exemplu 30, urmează să mai primim 30 de lei, deci:

$$+(+30) = +30;$$

+	—
54	82
28	37
75	30
30	25

dacă adăugăm acelaşi număr în coloana a doua, urmează să mai plătim 30 de lei, deci:

$$+(-30) = -30;$$

dacă suprimăm (ştergem) din prima coloană numărul 30, urmează să nu mai primim 30 de lei, deci:

$$-(+30) = -30.$$

În sfîrşit, dacă suprimăm din coloana a doua numărul 30, urmează să nu mai plătim 30 de lei, deci:

$$-(-30) = +30^{*}.$$

4) Sîntem obişnuiţi să privim adunarea ca o mărire şi scăderea ca o micşorare. Lucrurile se schimbă cînd al doilea termen al adunării sau scăderii este negativ.

A aduna un număr pozitiv înseamnă a mări;
a aduna un număr negativ înseamnă a micşora;
a scădea un număr pozitiv înseamnă a micşora;
a scădea un număr negativ înseamnă a mări.

5) Folosirea numerelor negative dă unor cuvinte sensul contrar celui obişnuit. De exemplu, a urca — 20 m înseamnă a coborî cu 20 m, iar a coborî cu —20 m înseamnă a urca cu 20 m; a primi — 100 lei înseamnă a restitui 100 de lei, iar a restitui — 100 lei înseamnă a primi 100 lei.

20. Adunarea şi scăderea unei sume

1) Fie de calculat:

$$+12 + (-6 + 2).$$

Trebuie să adunăm 12 cu suma $(-6 + 2)$ care este -4, adică să calculăm suma: $+12 - 4$, care este $+8$.

---

* Această justificare nu este completă. Aici se ia scăderea în sensul de a lua, a scoate. Or, nu poţi lua decît ceea ce există. Nu putem lua din suma de bani a unui om decît atunci cînd acel om o are; şi nu putem lua din pierderea lui decît atunci cînd are pierdere. Justificarea din text este, deci, valabilă numai cînd descăzutul şi scăzătorul sînt de acelaşi semn.

Ştim că, într-o sumă de mai mulţi termeni, avem voie să înlocuim doi sau mai mulţi termeni prin suma lor. Atunci avem voie să facem şi înlocuirea inversă, adică să înlocuim termenul -4 prin suma $-6+2$ (care este egală cu -4).

Obţinem astfel:

$$+12-6+2.$$

Dacă comparăm această expresie cu cea dată, observăm că a dispărut semnul + şi paranteza, iar numerele din paranteză au apărut cu semnele lor.

2) Fie de calculat:

$$+15-(8-17+4).$$

Dacă efectuăm suma din paranteză, obţinem

$$15-(-5)=15+5=20.$$

Ajungem la acelaşi rezultat dacă procedăm astfel: lăsăm la o parte semnul — şi paranteza, şi schimbăm semnele tuturor numerelor din paranteză, ca atunci cînd între paranteze figurează un singur număr:

$$15-8+17-4=20^*.$$

1) *Cînd în faţa unei paranteze se găseşte semnul + lăsăm la o parte semnul + şi paranteza şi luăm numerele din paranteză cu semnele lor.*

2) *Cînd în faţa unei paranteze se găseşte semnul — lăsăm la o parte semnul — şi paranteza şi schimbăm semnele tuturor numerelor din paranteză.*

---

* Semnul — care apare în faţa numărului 8 nu este semnul — din faţa parantezei. Numărul 8 are semnul + (nescris); schimbînd acest semn, se obţine — 8. Semnul — din faţa parantezei dispare.

Observare. Această regulă se aplică şi în cazul numerelor mixte, deşi nu se folosesc paranteze. De exemplu:

$$3-5\frac{2}{7}=3-\left(5+\frac{2}{7}\right)=3-5-\frac{2}{7}=-2-\frac{2}{7}=$$
$$=-2\frac{2}{7}.$$

21. **Înmulţirea.** Înmulţirea numerelor raţionale se face ca în exemplele următoare:

$$(+3)(+4)=+12; \quad (+5)(-4)=-20;$$
$$(-2)(+3)=-\ 6; \quad (-3)(-5)=+15.$$

Regulă. *Pentru a înmulţi două numere raţionale, se înmulţesc valorile lor absolute, iar în faţa rezultatului se pune semnul dat de regula semnelor, şi anume:*

$$(+)(+)=(+);\ (+)(-)=(-);\ (-)(+)=(-);$$
$$(-)(-)=(+).$$

Regula semnelor se mai poate exprima astfel: *Dacă cei doi factori au acelaşi semn, produsul are semnul +; dacă factorii au semne diferite, produsul are semnul —.*

22. **Aplicaţie.** Cînd un punct se mişcă cu o viteză de v metri pe minut, drumul pe care-l parcurge în t minute se află înmulţind viteza cu timpul. Dacă notăm drumul cu s, avem formula:

$$s=vt.$$

Exemplu. Un biciclist face 200 m pe minut. Ce distanţă face el în 8 minute? Avem: $v=200$, $t=8$, formula ne dă:

$$s=200\cdot 8=1\ 600.$$

În 8 minute biciclistul face 1 600 m.

Formula $s = vt$ are, deocamdată, sens numai cînd s, v şi t sînt numere pozitive. Dar distanţa, viteza şi timpul se pot exprima şi prin numere negative.

Presupunem că şoseaua are direcţia vest-est; luăm ca sens pozitiv sensul de la vest spre est. Fie O un punct de pe şosea, pe care-l luăm ca origine (fig. 11). Dacă un punct este situat la est de O, distanţa de la O pînă la el se exprimă printr-un număr pozitiv, iar dacă punctul este la vest de O, distanţa se exprimă printr-un număr negativ. De exemplu: $OA = +100$ m; $OB = -120$ m. Cînd biciclistul merge în sens pozitiv (spre est), viteza sa se exprimă printr-un număr pozitiv, iar cînd merge în sens negativ (spre vest), ea se exprimă printr-un număr negativ. De exemplu, cînd biciclistul merge spre est şi face 150 m pe minut avem $v = +150$, cînd biciclistul merge spre vest şi face 150 m pe minut, $v = -150$.

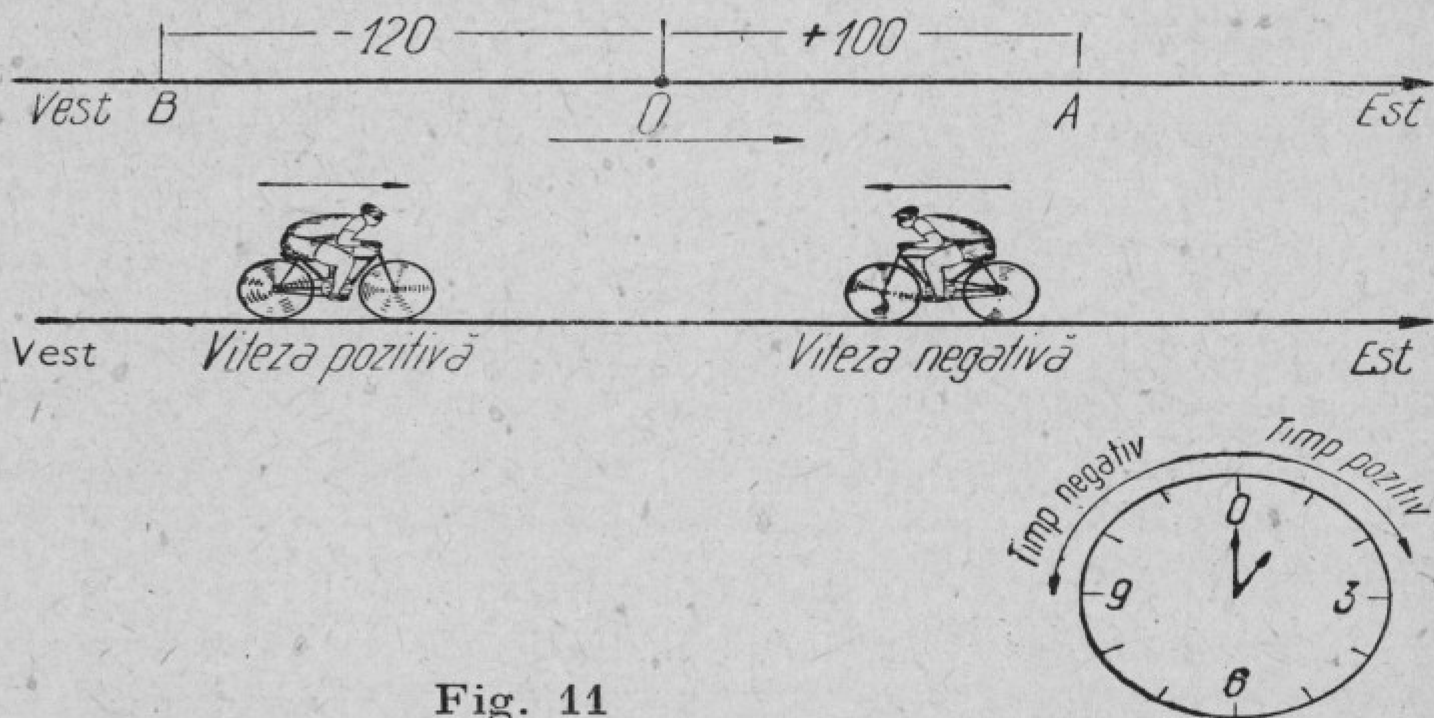


Fig. 11

Potrivim ceasul astfel încît să arate ora zero în momentul în care biciclistul trece prin punctul O. Timpul de după acest moment se exprimă printr-un număr pozitiv, iar timpul dinaintea acestui moment, printr-un număr negativ. De exemplu, $t = +5$ înseamnă că au trecut 5 minute de cînd biciclistul a trecut prin O, iar $t = -5$ înseamnă că mai sînt 5 minute pînă cînd biciclistul va trece prin O.

În primele cinci coloane sînt trecute datele problemei, iar în coloana a şaptea am scris valoarea lui s calculată

Tabelul de mai jos arată diferite cazuri posibile

1	2	3	4	5	6	7	8
În ce direcție merge biciclistul	Cîți metri face pe min	$v =$	Momentul considerat	$t =$	Unde se află biciclistul	$s =$	Verificarea formulei $vt = s$
De la vest spre est →	200	$+200$	5 min după ce a trecut prin O	$+5$	Cu 1 000 m la est de O	$+1\,000$	$(+200)\cdot(+5) = +1\,000$
De la vest spre est →	200	$+200$	5 min înainte de a trece prin O	-5	Cu 1 000 m la vest de O	$-1\,000$	$(+200)\cdot(-5) = -1\,000$
De la est spre vest ←	200	-200	5 min după ce a trecut prin O	$+5$	Cu 1 000 m la vest de O	$-1\,000$	$(-200)\cdot(+5) = -1\,000$
De la est spre vest ←	200	-200	5 min înainte de a trece prin O	-5	Cu 1 000 m la est de O	$+1\,000$	$(-200)\cdot(-5) = +1\,000$

pe baza judecății exprimate în coloana a șasea. În ultima coloană am calculat s cu ajutorul formulei $vt = s$. Se constată că, în toate cazurile, formula dă rezultatul adevărat.

Formula $s = vt$ a fost stabilită inițial numai pentru cazul cînd v și t sînt numere pozitive. Datorită regulii de înmulțire a numerelor pozitive și negative, aceeași formulă rămîne valabilă și în cazul cînd viteza și timpul, sau numai una din ele, se exprimă printr-un număr negativ.

23. **Înmulțirea cu zero.** Fie, de exemplu, înmulțirea $(-5) \cdot 0$. Conform regulii, trebuie să înmulțim valorile absolute, adică 5 cu 0 ceea ce dă 0. Deci $(-5) \cdot 0 = 0$.

Dacă unul din factorii unui produs este zero, produsul este zero.

Dacă înmulțim doi factori dintre care nici unul nu este zero obținem un produs diferit de zero.

Un produs este egal cu zero numai dacă cel puțin unul din factori este egal cu zero.

24. **Produs de mai mulți factori.** Fie, de exemplu, înmulțirea:

$$(-2)(-5)(+3)(-6) = ?$$

Socotim astfel: $(-2)(-5) = +10$;

$$(+10)(+3) = +30; \ (+30)(-6) = -180.$$

Rezultatul este: -180.

În practică se poate proceda astfel: întîi stabilim semnul: $(-)$ cu $(-)$ dă $(+)$; ... cu $(+)$ dă $(+)$; ... cu $(-)$ dă $(-)$. Scriem semnul $-$. Apoi aflăm valoarea absolută a rezultatului: $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 = 180$. După semnul minus scriem 180. Obținem astfel rezultatul -180.

25. **Proprietățile înmulțirii.** Înmulțirea numerelor raționale are aceleași proprietăți ca înmulțirea numerelor pozitive.

1) *Înmulțirea este comutativă.* Aceasta înseamnă că, dacă schimbăm ordinea factorilor, produsul rămîne neschimbat. Formula $ab = ba$ este adevărată cînd a și b sînt numere raționale oarecare, pozitive sau negative.

Exemple.

$$(-3)\cdot(+5) = -15; \quad (+5)\cdot(-3) = -15;$$

$$\left(+\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(+10) = -\frac{4}{3};$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(+10)\left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{4}{3}.$$

2) *Înmulțirea este asociativă.* Aceasta înseamnă: dacă *a)* înlocuim doi factori prin produsul lor, sau *b)* înlocuim un factor printr-un produs egal cu el, produsul final rămîne neschimbat.

Exemplu. Fie înmulțirea:

$$(+3)(-5)(+2)(-4).$$

Avem: $3\cdot5\cdot2\cdot4 = 120$; (+) cu (—) dă (—); ... cu (+) dă (—); ... cu (—) dă (+).

Rezultatul este: $+120$. Dacă înlocuim ultimii doi factori prin produsul lor, care este -8, obținem:

$$(+3)(-5)(-8) = +120,$$

adică același rezultat.

Invers, dacă în acest produs înlocuim factorul -8 prin produsul $(+2)(-4)$, obținem produsul inițial, deci tot $+120$.

3) *Înmulțirea este distributivă față de adunare.* Aceasta înseamnă că, pentru a înmulți o sumă cu un număr, înmulțim fiecare termen al sumei cu numărul și facem suma produselor. Prin sumă se înțelege sumă *algebrică*.

Aceasta se exprimă prin formula:

$$(a + b)m = am + bm,$$

unde a, b și m sînt numere raționale *oarecare* (pozitive sau negative).

Exemplu. Fie înmulțirea:

$$(-2 + 9 - 3) \cdot (-5).$$

Dacă efectuăm întîi suma algebrică din prima paranteză, avem: $-2 + 9 - 3 = +4$, $(+4) \cdot (-5) = -20$. Rezultatul este -20.

Dacă înmulțim întîi fiecare termen al sumei cu -5, adică aplicăm regula de mai sus, avem:

$$(-2)(-5) = +10;\ (+9)(-5) = -45;$$

$$(-3)(-5) = +15;\ +10 - 45 + 15 = -20.$$

Am obținut același rezultat ca mai înainte.

Dacă citim formula de mai sus de la dreapta spre stînga, ea ne arată următoarele: *Dacă toți termenii unei sume conțin același factor, acel factor poate fi scos în fața parantezei, ca factor comun.*

26. **Ridicarea la putere.** Această operație este, după cum se știe, o înmulțire repetată.

Exemple. $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$; $(+3)^4 = (+3)(+3)(+3)(+3) = +81$; $(-10)^5 = -100\ 000$.

Cu privire la semnul puterii unui număr, se observă următoarele:

$(+2)^2 = +4$; $(+2)^3 = +8$; $(+2)^4 = +16$ ș.a.m.d.

$(-2)^2 = +4$; $(-2)^3 = -8$; $(-2)^4 = +16$ ș.a.m.d.

Un număr pozitiv, ridicat la orice putere, dă tot un număr pozitiv. Un număr negativ ridicat la o putere pară *(cu soț)*, dă un număr *pozitiv*, iar ridicat la o putere impară *(fără soț)*, dă un număr *negativ*.

27. Împărţirea. Ca şi în cazul numerelor pozitive, a împărţi un număr a printr-un număr b înseamnă a găsi un număr c care, înmulţit cu b, să dea a.

$$a : b = c, \quad \text{dacă} \quad bc = a.$$

Fie, de exemplu, de făcut împărţirea:

$$(+12) : (-3).$$

Valoarea absolută a cîtului trebuie să fie 4, căci $4 \cdot 3 = 12$.

Să stabilim semnul cîtului. Dacă punem în faţa lui 4 semnul + şi facem proba, avem: $(+4) \cdot (-3) = -12$; deîmpărţitul este $+12$, deci n-am ales bine semnul. Să punem în faţa lui 4 semnul $-$; facem proba: $(-4)(-3) = +12$. Am obţinut deîmpărţitul. Deci:

$$(+12) : (-3) = -4.$$

În acelaşi fel se stabileşte, de exemplu, că:

$$(+12) : (+3) = +4; \quad (-12) : (+3) = -4;$$

$$(-12) : (-3) = +4.$$

Pentru a împărţi un număr raţional printr-un alt număr raţional se împarte valoarea absolută a deîmpărţitului prin valoarea absolută a împărţitorului, iar în faţa cîtului se pune semnul dat de regula semnelor, care este aceeaşi ca la înmulţire.

Exemple. $(-18) : (+2) = -9; (-3) : (-4) =$

$$= +\frac{3}{4}; \ 1\frac{3}{5} : \left(-1\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{5} : \left(-\frac{4}{3}\right) =$$

$$= -\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}.$$

Cînd împărţitorul este zero, împărţirea nu se poate face.

28. **Proprietăţile împărţirii.** 1) *Împărţirea este distributivă faţă de adunare.* Aceasta înseamnă că, pentru a împărţi o sumă printr-un număr, se împarte fiecare termen al sumei prin acel număr şi se face suma cîturilor. Prin sumă se înţelege *sumă algebrică.*

E x e m p l u. Fie împărţirea:

$$(15 + 24 - 12) : (-3) = ?$$

Dacă efectuăm mai întîi suma algebrică din paranteză, avem:

$$15 + 24 - 12 = +27; \quad (+27) : (-3) = -9.$$

Dacă aplicăm regula de mai sus, obţinem:

$$(+15) : (-3) = -5; \quad (+24) : (-3) = -8;$$

$$(-12) : (-3) = +4; \quad -5 - 8 + 4 = -9.$$

Am obţinut acelaşi rezultat ca mai înainte.

2) *Împărţirea unui produs.* Pentru a împărţi un produs printr-un număr, se împarte unul din factorii produsului prin acel număr, iar cîtul se înmulţeşte cu ceilalţi factori.

E x e m p l u. Fie împărţirea:

$$[(+6)(-2)(-10)] : (-2).$$

Avem:

$$(+6)(-2)(-10) = +120; \quad (+120) : (-2) = -60.$$

Dacă împărţim primul factor prin (—2), avem:

$$(+6) : (-2) = -3; \quad (-3)(-2)(-10) = -60;$$

dacă împărţim factorul al doilea prin (—2), avem:

$(-2):(-2) = +1; \quad (+1)(+6)(-10) = -60;$

dacă împărţim factorul al treilea avem:

$(-10):(-2) = +5; \quad (+6)(-2)(+5) = -60.$

În toate cazurile s-a obţinut acelaşi rezultat.

29. **Ordinea operaţiilor.** Cele învăţate la aritmetică în legătură cu ordinea operaţiilor sînt valabile şi în cazul cînd se operează cu numere raţionale oarecare, pozitive şi negative.

Operaţiile se împart în trei grupe:

operaţii de ordinul I: adunarea şi scăderea;

operaţii de ordinul II: înmulţirea şi împărţirea;

operaţii de ordinul III: ridicarea la putere şi extragerea rădăcinii.

Ordinea operaţiilor este dată de regulile* următoare:

1. *În cazul unui şir de adunări şi scăderi, operaţiile se efectuează în ordinea în care sînt scrise.*

2. *Cînd operaţiile sînt de ordine diferite, se efectuează întîi cele de ordin mai ridicat.*

E x e m p l e. 1. Fie de calculat:

$$-2(-3)+(-1)(+5)-(+4)(+3).$$

Avem de efectuat adunări şi scăderi (ordinul I) şi înmulţiri (ordinul II); efectuăm întîi înmulţirile, care sînt de un ordin mai ridicat. Avem:

$$-2(-3)=+6, \quad (-1)(+5)=-5,$$
$$(+4)(+3)=+12$$

şi expresia devine:

$$+6+(-5)-(+12).$$

---

* Aceste reguli nu se demonstrează, este vorba de o convenţie.

Desfacem parantezele:

$$+6-5-12,$$

şi calculăm această sumă algebrică; obţinem rezultatul -11.

În practică, lucrările se fac mai rapid. Se zice: $-2(-3)=+6$; $(-1)(+5)=-5$; dat fiind că în faţa parantezei avem semnul $+$, rămîne -5; $(+4)(+3)=+12$; dat fiind că în faţa parantezei avem semnul $-$, scriem -12. Aceste operaţii se fac în gînd şi apare direct suma algebrică $+6-5-12$.

2. $3(+2)^2-(-1)(-5)(-3)+(-2)(-3)^2(+2)$.

Efectuăm întîi ridicările la putere, care sînt operaţiile de ordinul cel mai ridicat:

$$(+2)^2=+4,\ (-3)^2=+9.$$

Operaţiile celelalte, care nu s-au efectuat încă, se transcriu. Expresia devine:

$$3(+4)-(-1)(-5)(-3)+(-2)(+9)(+2).$$

Acum efectuăm toate înmulţirile, ţinînd seama de semnul din faţa fiecărui produs:

$$3(+4)=+12;\ (-1)(-5)(-3)=-15$$

şi, deoarece acest produs are semnul $-$ în faţă, scriem $+15$;

$(-2)(+9)(+2)=-36$ şi, deoarece în faţa acestui produs figurează semnul $+$, rămîne -36. Obţinem astfel suma algebrică

$$+12+15-36=-9.$$

În practică, se poate ajunge direct la ultima sumă algebrică, procedînd astfel: în primul termen avem un număr pozitiv de ridicat la pătrat,

ceea ce va da un rezultat pozitiv; cum în fața acestui termen avem semnul + (nici un semn), rezultatul va fi pozitiv; $2^2=4$; $3 \cdot 4=12$; scriem $+12$. Al doilea termen este un produs de trei factori; — (de la -1) cu — (de la -5) dă + ;... cu — (de la -3) dă — ; cum în fața acestui produs avem semnul —, rezultatul va fi pozitiv; $1 \cdot 5= =5$, $5 \cdot 3=15$; scriem $+15$. Trecem la termenul al treilea. Avem un număr negativ de ridicat la pătrat, ceea ce dă un rezultat pozitiv; — (de la -2) cu + de la $(-3)^2$ dă — ;... cu + (de la $+2$) dă — ; cum în fața acestui produs avem semnul +, rămîne — ; $3^2=9$, $2 \cdot 9 \cdot 2=36$; deci -36. Obținem astfel: $+12+15-36=-9$.

30. **Paranteze.** *Cînd o expresie conține paranteze, se efectuează întîi operațiile din paranteze. Cînd o expresie conține paranteze obișnuite și paranteze mari*, se efectuează întîi operațiile din parantezele obișnuite.*

Cînd expresia conține și acolade, se efectuează întîi operațiile din parantezele obișnuite, apoi operațiile din parantezele mari și la urmă operațiile din acolade.

Exemple. 1. Fie expresia:

$$[3(-5)-2]^2-[(-2)(-4)+(-4)^2].$$

Efectuăm întîi expresiile din parantezele obișnuite, apoi operațiile din parantezele mari; obținem:

$$[-15-2]^2-[(+8)+(+16)]=[-17]^2-$$
$$-[+24]=+289-24=+265.$$

* Cînd trebuie închisă în paranteze o expresie care conține paranteze obișnuite (rotunde) se folosesc paranteze mari [...]. Cînd expresia conține deja paranteze mari, se folosesc acolade {....}

2. $\{[-5(-2)-3(-2)^2]^3-[2(-3)^3-$
$-7(-3)]\}^2=\{[+10-12]^3-[-54+21]\}^2=$
$=\{[-2]^3-[-33]\}^2=\{-8+33\}^2=\{+25\}^2=$
$=+625.$

31. **Observare.** Cînd o expresie conţine mai multe operaţii, o numim după *ultima* operaţie, care urmează a fi efectuată după regulile despre ordinea operaţiilor.

E x e m p l e. 1. Expresia $3x+5y$ este o sumă şi anume suma termenilor $3x$ şi $5y$, deşi conţine şi înmulţiri.

2. Expresia $(a+2)(2a-3)$ este un produs, şi anume produsul factorilor $(a+2)$ şi $(2a-3)$.

32. **Valoarea numerică a unei expresii algebrice.** Cînd într-o expresie algebrică înlocuim literele prin numere şi efectuăm operaţiile indicate de acea expresie, se obţine *valoarea numerică* a acelei expresii. În efectuarea calculelor, se ţine seamă de regulile privitoare la ordinea operaţiilor.

E x e m p l e. 1. Să calculăm valoarea expresiei

$$3x^2-5x$$

pentru $x=-\frac{3}{4}$.

Operaţia de ordinul cel mai ridicat din această expresie este ridicarea la pătrat; această operaţie se efectuează întîi:

$\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ şi se scrie:

$3x^2-5x=3\cdot\frac{9}{16}-5\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{16}+\frac{15}{4}=\frac{87}{16}=5\frac{7}{16}$.

2. Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$(5a^2-3b):(2a-3b^2)$$

pentru $a=-3,\ b=+5.$

Efectuăm mai întîi ridicările la pătrat $(-3)^2 = +9$, $(+5)^2 = +25$, și obținem pe rînd:

$$[5(+9) - 3(+5)] : [2(-3) - 3(+25)] =$$
$$= [+45 - 15] : [-6 - 75] = 30 : [-81] =$$
$$= -\frac{30}{81} = -\frac{10}{27}.$$

33. **Expresia algebrică ca funcție de literele pe care le conține.** Să considerăm, de exemplu, expresia:

$$3x - 5y.$$

Dînd literelor x și y diferite valori, această expresie capătă diferite valori numerice. Astfel, pentru $x = -1$, $y = +4$, ea capătă valoarea

$$3x - 5y = -3 - 20 = -23;$$

pentru $x = +6$, $y = -0{,}4$, ea capătă valoarea

$$3x - 5y = 18 + 2 = 20;$$

pentru $x = -\frac{5}{6}$, $y = 0$, ea capătă valoarea

$$3x - 5y = 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) - 5 \cdot 0 = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2} \text{ ş.a.m.d.}$$

Aceste rezultate se pot strînge într-un tabel ca următorul:

x	-1	$+6$	$\frac{-5}{6}$	....
y	$+4$	$-0{,}4$	0	....
$3x - 5y$	-23	$+20$	$-2\frac{1}{2}$	....

Fiecărei perechi de valori ale literelor x și y îi *corespunde* o anumită valoare a expresiei. Se

spune că expresia algebrică este *o funcție* de aceste litere.

34. **Valori pentru care o expresie algebrică își pierde sensul.** Considerăm expresia

$$3x:(x-2).$$

Dînd literei x diferite valori, se obține cîte o valoare numerică a expresiei. Dacă punem însă $x=2$, obținem

$$6:(2-2)=6:0.$$

Dar împărțirea prin zero nu se poate face. În adevăr, a împărți, de exemplu, 6 prin 0 înseamnă a găsi un număr care, înmulțit cu 0, să dea 6; dar un asemenea număr nu există, căci orice număr, înmulțit cu zero, dă zero, nu 6.

Așadar, cînd $x=2$, expresia noastră nu are nici o valoare numerică. Se spune că, pentru $x=2$, această expresie *nu are sens*.

O expresie algebrică care conține o împărțire își pierde sensul pentru acele valori ale literelor pentru care împărțitorul devine zero.

35. **Rezumat.** Cele patru operații cu numere pozitive și negative se pot exprima astfel:

Adunarea: $+(+\ldots)=+\ldots;\ +(-\ldots)=-\ldots$
Scăderea: $-(+\ldots)=-\ldots;\ -(-\ldots)=+\ldots$
Înmulțirea: $(+\ldots)(+\ldots)=+\ldots;$
$(+\ldots)(-\ldots)=-\ldots;$
$(-\ldots)(+\ldots)=-\ldots;$
$(-\ldots)(-\ldots)=+\ldots$
Împărțirea: ca la înmulțire.

36. **Observare.** Sub forma aceasta, regulile operațiilor se pot aplica și în cazul cînd numerele sînt reprezentate prin litere și nu știm dacă ele sînt pozitive sau negative.

Să considerăm, de exemplu, înmulțirea $(+x)(-y)$, unde nu știm dacă x este un număr pozitiv sau negativ,

nici dacă y este pozitiv sau negativ. Totuşi aplicînd regula semnelor, putem scrie:

$$(+x)(-y) = -xy$$

şi rezultatul va fi bun în toate cazurile.

Ca să dovedim aceasta, trebuie să considerăm mai multe cazuri:

1) x şi y sînt pozitivi. În acest caz, $+x$ este pozitiv, $-y$ este negativ, deci produsul trebuie să fie negativ. Rezultatul $(-xy)$ este bun, căci xy este pozitiv (ca produs de numere pozitive), iar $-xy$ este negativ.

2) x şi y sînt negativi. În acest caz, $+x$ este negativ, $-y$ este pozitiv, deci produsul trebuie să fie negativ. Rezultatul $(-xy)$ este bun, căci xy este pozitiv (ca produs de două numere de acelaşi semn), iar $-xy$ este negativ.

3) x este pozitiv, iar y este negativ. În acest caz, $+x$ este pozitiv, $-y$ este de asemenea pozitiv şi produsul trebuie să fie pozitiv. Rezultatul $(-xy)$ este bun, căci xy este negativ (ca produs de două numere de semne contrare), iar $-xy$ este pozitiv.

4) x este negativ, iar y este pozitiv. În acest caz, $+x$ este negativ, $-y$ este de asemenea negativ, deci produsul trebuie să fie pozitiv.

Rezultatul $(-xy)$ este bun, căci xy este negativ (ca produs de două numere de semne contrare), iar $-xy$ este pozitiv.

Aşadar, regula semnelor dă rezultate bune în toate cazurile. Cînd aplicăm această regulă, nu este necesar să ştim dacă literele reprezintă numere pozitive sau negative. Exprimată sub forma de mai sus, regula semnelor dă mai mult decît regula de la pagina 31.

Aceeaşi observare este valabilă şi pentru celelalte operaţii.

EXERCIŢII

Numere pozitive şi negative

1. Să se exprime cu ajutorul unui număr pozitiv sau negativ: *a)* un beneficiu de 800 de lei; *b)* anul 102 î.e.n.; *c)* o ieftinire cu 25 de lei; *d)* 800 m sub nivelul mării; *e)* o depăşire a nor-

mei cu 250 de piese; *f)* o sumă de 15 lei pe care trebuie s-o dăm cuiva; *g)* anul 1848 e.n.; *h)* o forţă care trage înainte cu 500 de kg; *i)* o forţă care trage înapoi cu 200 kg.

2. În tabelul de mai jos sînt date longitudinea şi latitudinea unor puncte de pe glob *. Să se exprime aceste mărimi prin numere pozitive sau negative.

Oraşul	*Longitudinea*	*Latitudinea*
Bucureşti	26° est	44°30′ nord
Moscova	37° est	55° nord
Cairo	32° est	30° nord
Rio de Janeiro	43° vest ..	22° sud
Chicago	89° vest....	41° nord
Leningrad	30° est	60° nord
Tokio	140° est	36° nord
Melbourne	145° est	37° sud

3. În cursul unei zile, termometrul a arătat temperaturile următoare:

Ora	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Temperatura	5°	8°	9°	12°	15°	20°	25°	25°	24°	21°	13°	16°	15°

Să se facă un tabel ca cel de mai jos, indicînd printr-un număr pozitiv sau negativ cum a variat temperatura în cursul fiecărei ore:

Intervalul de timp	8—9	9—10	10—11	11—12	...
Variaţia temperaturii	+3				

4. Un ascensor porneşte de la parter, urcă a metri şi apoi coboară cu b metri. La cîţi metri

* Longitudinile şi latitudinile sînt date cu aproximaţie.

de la parter s-a oprit? Să se introducă în formulă valorile următoare și să se efectueze scăderea: *a)* $a=12$, $b=4$; *b)* $a=6$, $b=10$. Ce înțeles are rezultatul negativ?

5. Un eveniment a avut loc în anul a, iar un alt eveniment cu b ani înaintea lui. În ce an a avut loc evenimentul al doilea? Aplicație numerică: 1) $a = 1945$, $b = 6$; 2) $a = 50$, $b = 90$. Ce înțeles are rezultatul negativ?

6. Să se reprezinte pe axa numerelor, următoarele numere (se va lua ca unitate 1 cm): $+4$; $-3{,}8$; $-2{,}9$; $+1$; $+3{,}7$; $-1{,}8$.

7. Ce abscisă are punctul situat: *a)* cu 3 unități la dreapta punctului $+7$; *b)* cu 5 unități la stînga punctului $+11$; *c)* cu 4 unități la stînga punctului -3; *d)* cu 5 unități la dreapta punctului -11; *e)* cu 8 unități la dreapta punctului -2; *f)* cu 7 unități la stînga punctului $+2$?

8. Să se reprezinte pe axa numerelor: $+1$ și -1; $+2$ și -2; ... Cum sînt așezate aceste puncte față de origine? Cîte puncte (deosebite de origine) există pe axa numerelor care să reprezinte numere cu aceeași valoare absolută? Cum sînt distanțele lor de la origine?

9. Să se arate care este valoarea absolută a fiecăruia dintre numerele următoare: -3; 5; $+2{,}8$; $-5\frac{2}{3}$; 12; -1.

E x e m p l u. $|-6|=6$.

10. Să se copieze următoarele perechi de numere și să se pună între ele semnul $>$ sau $<$, după cum este cazul:

a) $+5$ și $+6$; *b)* -32 și -10; *c)* $+3$ și -8; *d)* $+5$ și 0; *e)* -8 și 0; *f)* -11 și $+10$; *g)* 0 și -3; *h)* 0 și $+3$; *i)* $+12$ și $+8$.

11. Să se scrie în ordine crescătoare următoarele numere: $+8$, $-2,5$, -7, $+3\frac{1}{2}$, $-2\frac{4}{9}$, $+4,7$.

12. Să se scrie în ordine descrescătoare numerele:

$$-4,\ -11,\ +3,\ +25,\ -7,9,\ +3\frac{7}{8}.$$

13. Se consideră inegalităţile:

$$+7>+6,\ -6>-7,\ +3>-10,\ -3<0,\ +3>0.$$

Să se interpreteze aceste inegalităţi considerînd că numerele reprezintă: *a*) abscisele a două puncte de pe o dreaptă pe care s-a ales o origine, iar ca sens pozitiv sensul de la stînga spre dreapta; *b*) altitudinile a două localităţi, socotite de la nivelul mării; *c*) două date istorice; *d*) două longitudini; *e*) două latitudini.

Adunarea

14. Să se efectueze adunările:

a) $(+12)+(+6)$; *b*) $(-15)+(-18)$;
c) $(-2,9)+(-3,6)$; *d*) $\left(+5\frac{3}{4}\right)+\left(+3\frac{1}{4}\right)$;
e) $(-18)+(+7)$; *f*) $(+8,5)+(-2,4)$;
g) $(+6)+(-1)$; *h*) $(-18)+(+12)$.

Fiecare exerciţiu se va interpreta (oral) în mai multe feluri. Exemplu: $(+15)+(-6)$. Interpretarea I: Înaintez cu 15 m, apoi merg înapoi cu 6 m. Rezultatul este o înaintare cu 9 m. Rezultatul este: $+9$. Interpretarea II: O creştere cu 15 unităţi este urmată de o scădere cu 6 unităţi. Rezultă o creştere cu 9 unităţi.

---

14. *a)* $+18$; *b)* -33; *c)* $-6,5$; *d)* $+9$; *e)* -11; *f)* $+6,1$; *g)* $+5$; *h)* -6.

15. Să se calculeze*:

a) $+7+3$; *b*) $+7-3$; *c*) $-7+3$;

d) $-7-3$; *e*) $-5-0{,}8$; *f*) $-6{,}2+3{,}5$;

g) $+12-12{,}3$; *h*) $+0{,}8-0{,}2$; *i*) $-3+0{,}15$;

j) $+5\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}$; *k*) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; *l*) $+3\frac{1}{4}-1\frac{1}{2}$;

m) $-6\frac{3}{8}-2\frac{3}{4}$.

16. Să se calculeze:

a) $-6+8-1-4+3-5$; *b*) $-15-6-3-8-1$;

c) $+16-7-5-4-8+9-1$;

d) $-1+6+3-10-4+2+7-15$;

e) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{7}{12}-\frac{2}{3}$;

f) $-\frac{7}{9}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$;

g) $-\frac{11}{12}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$;

h) $\frac{14}{18}-\frac{7}{24}-\frac{11}{12}+\frac{5}{9}-\frac{3}{8}$;

i) $5\frac{3}{8}-2\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}+2\frac{2}{3}-1\frac{1}{6}$;

j) $3\frac{7}{24}-1\frac{9}{16}+2\frac{5}{12}-4\frac{5}{6}+6\frac{3}{8}$.

---

* Vezi nota de la § 15.

---

16. *a)* -5; *b)* -33; *c)* 0; *d)* -12; *e)* $-\frac{1}{2}$; *f)* $+\frac{11}{36}$; *g)* $+\frac{5}{24}$; *h)* $-\frac{1}{4}$; *i)* $-\frac{17}{24}$; *j)* $5\frac{11}{16}$.

Calculele se vor face în două moduri: *a)* operațiile se efectuează în ordinea în care sînt scrise; *b*) se adună deosebit termenii pozitivi și deosebit cei negativi.

17. Să se calculeze suma $x + y$, cînd x și y au valorile indicate în tabelul de mai jos. Se va completa rîndul al treilea.

x	$-8{,}3$	$+5\frac{3}{8}$	$-5\,218$	$-5\frac{3}{11}$	$+8{,}25$	0
y	$+2{,}5$	$-2\frac{1}{4}$	$+3\,104$	$-2\frac{8}{11}$	$-3\frac{1}{4}$	-17
$x+y$						

18. Să se compună o problemă în care să fie vorba de ridicarea și coborîrea temperaturii și care să se rezolve: *a*) prin adunarea a două numere pozitive; *b*) prin adunarea unui număr pozitiv cu un număr negativ; *c*) prin adunarea a două numere negative.

19. Abscisa unui punct A este $x = +5$. Un punct B este situat cu $y = 3$ unități la dreapta lui A. Să se afle abscisa punctului B. Să se dea răspunsul sub formă de formulă și să se dea literelor x și y valorile următoare (se va face pentru fiecare caz o schiță): *a*) $x = +8$, $y = -12$; *b*) $x = -6$, $y = 2$; *c*) $x = -4$, $y = 9$; *d*) $x = -3$, $y = 3$.

20. Un om s-a născut în anul a și a trăit b ani. În ce an a murit? Să se dea rezultatul sub formă de formulă. Să se dea apoi literelor valorile care corespund cazurilor următoare și să se calculeze anul morții:

a) N. Bălcescu s-a născut în anul 1819 și a trăit 33 de ani;

b) Socrate s-a născut în anul 469 î.e.n. şi a trăit 70 de ani;

c) Ovidiu s-a născut în anul 43 î.e.n. şi a trăit 60 de ani.

21. Asupra unui punct acţionează două forţe de aceeaşi direcţie, una de a kg, iar cealaltă de b kg. Să se calculeze rezultanta lor. Să se înlocuiască a şi b prin valorile următoare şi să se explice rezultatul: $a = +10$, $b = +4$; $a = +10$, $b = -4$; $a = -10$, $b = +4$; $a = -10$, $b = -4$.

Scăderea

22. Să se înlocuiască punctele din egalităţile următoare printr-un număr potrivit, astfel ca egalităţile să fie adevărate:

a) $(+15) + (\dots) = +23$; *b*) $(\dots) + (+6) = -8$;

c) $(+7) + (\dots) = -10$; *d*) $(-10) + (\dots) = -15$.

23. Să se efectueze scăderile următoare:

a) $(+15) - (+4)$; *b*) $(+18) - (-6)$;

c) $(-10) - (+3)$; *d*) $(-12) - (-1)$;

e) $(-3{,}8) - (+1{,}5)$; *f*) $\left(+\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right)$.

24. Asupra unui punct acţionează două forţe de aceeaşi direcţie. Rezultanta lor este de a kg, iar una din ele este de b kg. Să se afle cealaltă forţă. Să se dea literelor a şi b valorile următoare şi să se explice rezultatul: $a = +13$, $b = +8$; $a = +13$, $b = +20$; $a = +13$, $b = -8$; $a = -13$, $b = -20$; $a = -13$, $b = +4$.

25. Un om s-a născut în anul a și a murit în anul b. Cîți ani a trăit? Să se exprime rezultatul în litere și să se aplice la cazurile următoare, pentru a calcula cîți ani a trăit:

a) Eminescu (1850...1889);
b) Arhimede (287 î.e.n. ... 213 î.e.n.).

26. Ce înțeles pot avea expresiile următoare: *a*) vremea s-a răcit cu $-3°$; *b*) un obiect s-a scumpit cu -5 lei; *c*) mașina a plecat cu -10 minute mai tîrziu; *d*) ziua s-a mărit cu -15 minute; *e*) dintr-o clasă au plecat -6 elevi.

27. Cum este suma a doi termeni în comparație cu primul ei termen (mai mare sau mai mică), dacă: *a*) termenul al doilea este pozitiv; *b*) termenul al doilea este negativ? Să se dea exemple.

28. Cum este diferența a două numere în comparație cu descăzutul (mai mare sau mai mică), dacă: *a*) scăzătorul este pozitiv; *b*) scăzătorul este negativ. Să se dea exemple.

29. Să se scrie următoarele expresii sub formă de sumă algebrică (fără paranteze) și apoi să se efectueze:

a) $(+12)+(-6)-(-4)-(+8)-(+3)+(-6)$;
b) $(-15)+(-12)-(+8)+(-2)-(+4)+(-2)$;
c) $(+6)+(+4)-(-5)-(-3)+(+1)-(-8)$;
d) $(+6)+(-10)+(-4)-(-3)-(-7)+(-16)$.

30. Să se calculeze în două feluri, efectuînd suma algebrică din paranteză și desfăcînd paranteza, următoarele expresii:

a) $24+(6-2+8-5)$; *b*) $18-(5-9-3+8)$.

---

29. *a)* -7; *b)* -43; *c)* $+27$; *d)* -14. **30.** *a)* $+31$; *b)* 17.

31. Să se calculeze expresiile următoare, desfăcînd parantezele:

a) $5-12+(6-4-9)-(3-9-11)$;

b) $-(-9+12-11-6)+(11-17-3)-(5-9)$;

c) $28-(11-2)+(-7+5)-(-9+3)+(6-8)$.

Înmulțirea

32. Să se efectueze:

a) $(-8)(+2)$; *b)* $(+3)(-4)$; *c)* $(-5)(-2)$; *d)* $(-9)(-3)$; *e)* $(+9)(-8)$; *f)* $(-7)(+6)$.

33. Să se efectueze:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)(-6)$; *b)* $\left(+\frac{3}{2}\right)(-4)$; *c)* $(-8)\left(-\frac{5}{6}\right)$;

d) $\left(+\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)$; *e)* $\left(-\frac{7}{8}\right)\left(-1\frac{5}{14}\right)$; *f)* $(-3,5)(-4)$.

34. Să se efectueze:

a) $(-2)(+3)(-4)$; *b)* $(+4)(-2)(-9)$;

c) $(+3)(-8)(+10)$; *d)* $(-3)(-5)(-7)$;

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)(+6)\left(-\frac{3}{8}\right)$; *f)* $(-2,5)(+2)(-3)$.

35. Cum se schimbă valoarea absolută a unui număr și cum se schimbă semnul lui dacă-l înmulțim cu $+1$? Dar dacă-l înmulțim cu -1?

---

31. *a)* $+3$; *b)* $+9$; *c)* $+21$.

36. Cu cît scade un număr pozitiv dacă-l înmulţim cu -1? Întrebare asemănătoare pentru cazul unui număr negativ.

37. Produsul a două numere este negativ.

a) Ce putem spune despre semnele acestor numere?

b) Aceeaşi întrebare, dacă produsul este pozitiv.

38. Produsul a trei numere este pozitiv. *a*) Ce putem spune despre semnele lor? *b*) Aceeaşi întrebare, dacă produsul este negativ.

39. Dacă a este pozitiv, ce semn are $-a$? Dar dacă a este negativ? Ce putem spune despre semnul produsului $a(-a)$?

Ridicarea la putere

40. Să se calculeze: $(-4)^2$; $(+5)^3$; $(-5)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(+\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; $(+0,1)^2$; $(-0,1)^3$; $(-1)^6$; $(-1)^{10}$.

Împărţirea

41. Să se calculeze:

a) $(+24):(-6)$; *b*) $(-18):(-3)$;
c) $(+15):(+3)$; *d*) $(-14):(+7)$;
e) $(-12):(-4)$; *f*) $(+8):(+2)$;
g) $(-36):(-12)$; *h*) $(+30):(-10)$;
i) $(-100):(-20)$.

---

36. Cu dublul lui. **38.** *a)* Unul dintre ele sau toate trei sînt pozitive; *b)* Unul dintre ele sau toate trei sînt negative.

42. Să se scrie cîturile următoare sub formă de fracţie pozitivă sau negativă:

$$\frac{-3}{+5};\ \frac{+5}{-7};\ \frac{-4}{-9};\ \frac{+6}{+13};\ \frac{-8}{-3};\ \frac{+7}{-2};\ \frac{-17}{+5}.$$

43. Să se efectueze împărţirile următoare, punînd rezultatul sub formă de fracţie sau de număr mixt:

a) $(-8):(-11)$; *b)* $(+11):(-4)$;
c) $(-23):(+5)$; *d)* $(+6):(+7)$;
e) $(-19):(-6)$; *f)* $(+27):(-8)$.

44. Care dintre fracţiile următoare este mai mare ca 1 şi care este mai mică decît 1? Să se compare de fiecare dată şi numărătorul cu numitorul.

$$\frac{-3}{5};\ \frac{-2}{-7};\ \frac{2}{-3};\ \frac{5}{-4};\ \frac{-9}{-8};\ \frac{-1}{4}.$$

Mai este valabil ce s-a învăţat la aritmetică: dacă numărătorul este mai mare ca numitorul, fracţia este supraunitară ş.a.m.d. Care dintre aceste reguli rămîne valabilă?

45. Să se calculeze:

a) $\left(-\frac{5}{8}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)$; *d)* $\left(-\frac{3}{5}\right):\left(+1\frac{1}{2}\right)$;

b) $\left(+\frac{6}{7}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)$; *e)* $\left(+3\frac{1}{8}\right):\left(-1\frac{9}{16}\right)$;

c) $\left(+\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{6}{7}\right)$; *f)* $\left(-2\frac{7}{12}\right):\left(-5\frac{1}{6}\right)$.

---

45. *a)* $-\frac{5}{6}$; *b)* $-1\frac{3}{7}$; *c)* $-\frac{7}{10}$; *d)* $-\frac{2}{5}$; *e)* -2; *f)* $+\frac{1}{2}$.

46. Ce schimbare suferă un număr dacă-l împărţim prin $(+1)$? Dar dacă-l împărţim prin (-1)?

47. Cîtul a două numere este negativ. Ce se poate spune despre semnele acestor numere? Aceeaşi întrebare, pentru cazul cîtului pozitiv.

48. Să se calculeze:

a) $3(-2)+2(-5)-4(-1)$;

b) $(-6)(-3)+(+3)(-5)-(-1)(-2)-$ $-(-4)(+3)$;

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{9}\right)+\left(-\frac{5}{12}\right)\left(-1\frac{1}{5}\right)$.

49. Să se calculeze valoarea expresiei $3a-2b$, pentru: *a)* $a=-4,\ b=+3$; *b)* $a=1,\ b=1$; *c)* $a=0,\ b=-5$; *d)* $a=-6,\ b=+2$; *e)* $a=-1,\ b=-2$.

50. Să se calculeze valoarea expresiei $\frac{3}{5}x-$ $-\frac{1}{2}y-2z$, pentru: *a)* $x=3,\ y=7,\ z=2$;

b) $x=-8,\ y=-4,\ z=-3$;

c) $x=-4,\ y=-2,\ z=-13$.

---

48. *a)* -12; *b)* $+13$; *c)* $\frac{1}{3}$.

49. *a)* -18; *b)* $+1$; *c)* $+10$; *d)* -22; *e)* $+1$.

50. *a)* $-5\frac{7}{10}$; *b)* $+3\frac{1}{5}$; *c)* $24\frac{3}{5}$.

51. Să se calculeze valoarea expresiei $-3m+4n$ pentru: *a)* $m=-\frac{1}{3}$, $n=+\frac{1}{2}$; *b)* $m=\frac{5}{6}$, $n=-\frac{3}{4}$; *c)* $m=-\frac{2}{9}$, $n=\frac{1}{6}$; *d)* $m=-\frac{5}{12}$, $n=-\frac{3}{8}$.

52. Să se calculeze valoarea expresiei $2a-0{,}5b+3x$ pentru:

a) $a=-1{,}5$, $b=+4$, $x=-1$;

b) $a=-3$, $b=+6$, $x=-1{,}8$;

c) $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{3}{5}$, $x=-\frac{5}{6}$.

53. Să se calculeze:

a) $(+6)^2+(-3)^3-(+2)^4-12$; *b)* $(-2)^3-(+5)^2+(-2)^4-(-3)^3$; *c)* $(-1)^6-(-2)^3+(-3)^2+(-2)^2$.

54. Să se calculeze: *a)* $3\cdot(-2)^2$; *b)* $-2(-3)^2$; *c)* $\left(-\frac{1}{4}\right)(-2)^3$; *d)* $(-0{,}5)^2(-4)$; *e)* $(+10)^2(-0{,}3)$.

Să se calculeze valoarea expresiilor:

55. $2x^3-5x^2$ pentru:

a) $x=-3$; *b)* $x=+2$; *c)* $x=-10$.

---

51. *a)* $+3$; *b)* $-5\frac{1}{2}$; *c)* $+1\frac{1}{3}$; *d)* $-\frac{1}{4}$. **52.** *a)* -8; *b)* $-14{,}4$; *c)* $-4\frac{2}{15}$. **53.** *a)* -19; *b)* $+10$; *c)* $+22$. **54.** *a)* $+12$; *b)* -18; *c)* $+2$; *d)* -1; *e)* -30. **55.** *a)* -99; *b)* -4; *c)* $-2\,500$.

56. $\frac{1}{2}a^2 - 3a + 4$ pentru:

a) $a = -2$; *b*) $a = +1$; *c*) $a = -10$.

57. $5x^2 - 3a^2 - 2x + 3a$ pentru:

a) $x = -1$, $a = -3$; *b*) $x = +2$, $a = -2$; *c*) $x = -3$, $a = +4$.

58. $(2a - 5b)^2$ pentru: *a*) $a = -4$, $b = 1$; *b*) $a = 3$, $b = -2$; *c*) $a = 0$, $b = -3$.

59. $(3x - 2y - z)^3$ pentru:

a) $x = -4$, $y = -3$, $z = -5$; *b*) $x = 6$, $y = 0$, $z = -5$.

60. Expresia a^2 poate lua valori negative? Dar x^3?

61. Expresia $a^2 + b^2$ poate lua valori negative?

62. Să se calculeze:

a) $(+5):(-2)^2$; *b*) $(-3)^2:(-4)$; *c*) $(-1)^3:(+2)^2$

63. Să se efectueze:

a) $\frac{-3+(-5)^2}{2-9}$; *b*) $\frac{(+6)-(+4)}{(+3)(+2)-(-2)^2}$; *c*) $\frac{(+3)^2-(-2)^3}{21-(+2)^2}$.

---

56. *a*) $+12$; *b*) $1\frac{1}{2}$; *c*) $+84$. 57. *a*) -29; *b*) -2; *c*) $+15$. 58. *a*) $+169$; *b*) $+256$; *c*) $+225$. 59. *a*) -1; *b*) $+12\,167$. 62. *a*) $+1\frac{1}{4}$; *b*) $-2\frac{1}{4}$; *c*) $-\frac{1}{4}$.

63. *a*) $-3\frac{1}{7}$; *b*) $+1$; *c*) $+1$.

Să se calculeze valorile expresiilor următoare:

64. $\frac{2a}{a+3}$ pentru: *a)* $a=-2$; *b)* $a=-5$; *c)* $a=1$.

65. $\frac{x^2-8}{x^2+1}$ pentru: *a)* $x=-1$; *b)* $x=-2$; *c)* $x=0$.

66. $\frac{5a^2-3b^2}{2b-5a}$ pentru: *a)* $a=-2$, $b=+4$; *b)* $a=+2$, $b=-4$; *c)* $a=+\frac{1}{5}$, $b=-\frac{1}{3}$.

67. $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}$ pentru: *a)* $x=+5$, $y=-1$; *b)* $x=-1$, $y=+5$; *c)* $x=-\frac{1}{2}$, $y=+2$.

68. $\frac{ax^2-3a^2}{2x^2-5ax}$ pentru: *a)* $a=-4$, $x=+6$; *b)* $a=-5$, $x=-5$; *c)* $a=-2$, $x=\frac{1}{4}$.

69. Să se calculeze valorile expresiei $2x-5$ pentru valorile lui x indicate în tabelul de mai jos și să se scrie rezultatele în rîndul al doilea, completînd tabelul.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$2x-5$								

64. *a)* -4; *b)* $+5$; *c)* $+\frac{1}{2}$. **65.** *a)* $-3\frac{1}{2}$; *b)* $-\frac{4}{5}$; *c)* -8. **66.** *a)* $-\frac{14}{9}$; *b)* $\frac{14}{9}$; *c)* $\frac{2}{25}$. **67.** *a)* $1\frac{5}{26}$; *b)* $1\frac{5}{26}$; *c)* $1\frac{4}{17}$. **68.** *a)* -1; *b)* $2\frac{2}{3}$; *c)* $-4\frac{13}{21}$.

Cum variază valoarea numerică a acestei expresii cînd x parcurge aceste valori?

70. Să se facă lucrarea analogă pentru expresia: $10-3x$, dînd literei x aceleași valori ca în tabelul precedent.

71. Lucrarea analogă pentru expresia: x^2-4x-5, dînd lui x valorile: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

72. Ce semn pot avea expresiile: $\frac{a^2}{b^2}$; $\frac{a^2}{b}$; $\frac{a}{b^2}$?

Capitolul III

MONOAME ŞI POLINOAME

37. **Calcul algebric.** În cele ce urmează vom învăţa cum se pot face calcule cu numere reprezentate prin litere, deci fără să ştim ce număr reprezintă fiecare literă.

Fie, de exemplu, adunarea:

$$3a + 4a.$$

Nu ştim dacă a reprezintă numărul 3 528, sau $-4\frac{1}{2}$, sau un alt număr oarecare. Ştim însă că litera a din $3a$ reprezintă acelaşi număr ca litera a din $4a$. Aceasta ne ajunge ca să putem spune că:

$$3a + 4a = 7a.$$

În adevăr, dacă înmulţim un număr oarecare cu 3, apoi cu 4 şi adunăm rezultatele, obţinem acelaşi rezultat ca atunci cînd înmulţim numărul cu 7.

Dacă a este un număr pozitiv, îl putem privi ca măsura unei lungimi. Să presupunem că avem mai multe bucăţi de pînză egale, fiecare din ele avînd a metri. Atunci 3 bucăţi de pînză au $3a$ metri, 4 bucăţi de pînză au $4a$ metri, iar $3 + 4 = 7$ bucăţi de pînză au $7a$ metri.

38. **Identitate.** Să privim egalitatea:

$$3a + 4a = 7a.$$

Expresiile $3a + 4a$ și $7a$ au valori numerice egale oricare ar fi valoarea numerică a lui a.

De exemplu, pentru $a = 10$, avem:

$$3a + 4a = 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 = 30 + 40 = 70;$$
$$7a = 7 \cdot 10 = 70;$$

pentru $a = -5$, avem:

$$3a + 4a = 3(-5) + 4(-5) = -15 - 20 = -35;$$
$$7(-5) = -35.$$

Se spune că $3a + 4a = 7a$ este o *identitate*.

O identitate arată că expresia din stînga semnului egal are aceeași valoare numerică cu cea din dreapta, *oricare* ar fi valorile literelor.

Exemple.

$$8xy + 4xy = 12xy; \quad 5b - 2b = 3b.$$

În cele ce urmează vom face calcule mai complicate cu expresii algebrice. În locul unei expresii date (cum ar fi $3a + 4a$) se va obține o altă expresie ($7a$). Totdeauna expresia dată și rezultatul, legate prin semnul $=$, vor forma o identitate.

39. **Monoame.** 1) O expresie ca:

$$3a, \ -5ab, \ 2x^2, \ -\frac{2}{5}ax^2$$

se numește *monom*. Un monom este o expresie algebrică, care nu indică alte operații decît înmulțiri și ridicări la putere. Expresia: $2a + 3$, de exemplu, conține și o adunare, ea nu este un monom.

Un monom este format, de obicei, dintr-un factor numeric (constant), numit *coeficient*, și o parte *literală*. De exemplu, în cazul monomului $-\frac{2}{5}ax^2$, coeficientul este $-\frac{2}{5}$, iar partea lite-

rală este ax^2. Coeficientul se scrie în față, iar dacă partea literală conține mai multe litere, ele se scriu în ordine alfabetică. De exemplu, în loc de $x^3 3a$ se scrie $3ax^3$. Acest lucru este permis, pentru că înmulțirea este comutativă.

O expresie formată dintr-o singură literă sau un singur număr este tot un monom. De exemplu: a, 3, $-\frac{5}{6}$ sînt monoame.

2) Cînd monomul conține o singură literă (variabilă), exponentul acelei litere indică *gradul* monomului. De exemplu, $5x^3$ este de gradul 3; $-2x^4$ este de gradul 4. Cînd litera nu are exponent, se consideră că exponentul ei este 1, deci monomul este de gradul întîi. De exemplu, monoamele $5x$, $-2a$, $-\frac{3}{5}y$ sînt de gradul întîi. Un monom format dintr-un singur număr, de exemplu 4 sau -1, este de gradul zero.

3) Două monoame care au aceeași parte literală (aceleași litere avînd aceiași exponenți) se numesc monoame asemenea sau *termeni asemenea*. De exemplu, monoamele:

$$5a \text{ și } -3a \text{ sau } -\frac{3}{8}x^2 \text{ și } 7x^2$$

sînt asemenea. Monoamele $2x$ și $3a$ nu sînt asemenea; nici monoamele $5x^2$ și $5x^3$ nu sînt asemenea.

40. **Reducerea termenilor asemenea.** 1) Știm că, dacă toți termenii unei sume conțin același factor, el poate fi scos ca factor comun (§ 25).

E x e m p l e.

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 3(4 + 7);$$

$$8 \cdot 6 + 8 \cdot (-5) + 8 \cdot 3 = 8(6 - 5 + 3).$$

2) Să considerăm expresia: $5x + 3x - 2x$.

Ea reprezintă suma monoamelor $+5x$, $+3x$ și $-2x$, adică o sumă de trei produse neefectuate. Toate conțin factorul x. Scoatem factorul comun și obținem:

$$x(5 + 3 - 2) = x \cdot 6 = 6x.$$

Deci:

$$5x + 3x - 2x = 6x.$$

Se spune că am redus termenii asemenea. La rezultatul $6x$ putem ajunge mai repede astfel: facem suma algebrică a coeficienților $(5 + 3 - - 2 = 6)$ și înmulțim cu factorul x.

E x e m p l e. $2a^2 - 7a^2 + 3a^2 = -2a^2$;

$$-\frac{3}{5}y + 2y = \frac{7}{5}y.$$

Pentru a reduce doi sau mai mulți termeni asemenea, facem suma algebrică a coeficienților și o înmulțim cu partea literală.

Două monoame opuse, cum ar fi:

$$+3a \text{ și } -3a; \ -5x^2 \text{ și } +5x^2$$

reprezintă două numere opuse, deci suma lor este zero. Cînd, într-o sumă, apar două monoame opuse le putem tăia. Se spune că ele se reduc.

3) Considerăm expresia:

$$3x + x.$$

Ea reprezintă suma monoamelor $3x$ și x, care sînt asemenea. La prima vedere nu putem aplica regula, căci monomul x n-are coeficient. Dar știm

că dacă înmulţim 1 cu un număr oarecare obţinem tot acel număr:

$$1 \cdot 5 = 5;\ 1 \cdot 6 = 6;\ 1 \cdot (-3) = -3.$$

Atunci înlocuim x prin $1x$ şi obţinem:

$$3x + x = 3x + 1x = 4x.$$

Cînd un monom nu are coeficient, considerăm că are coeficientul 1.

4) Să considerăm expresia:

$$2a - 5b.$$

Ea reprezintă suma monoamelor $2a$ şi $-5b$ care nu sînt asemenea. Această adunare nu poate fi efectuată cîtă vreme nu cunoaştem valorile numerice ale literelor a şi b.

41. **Polinoame.** 1) Expresii ca:

$$-5a + 2x - 4y;\quad x^2 - 4x + 3;$$

$$\frac{1}{2}ab^2 + 2a^3 - 5b^3$$

se numesc *polinoame*. Un polinom este o sumă algebrică de două sau mai multe monoame. Aceste monoame se numesc *termenii* polinomului. De exemplu, termenii primului dintre polinoamele de mai sus sînt: $-5a$, $2x$ şi $-4y$. Un polinom format din doi termeni se numeşte *binom* (de exemplu: $2x + y$), iar un polinom format din trei termeni (de exemplu: $2x^2 - 3x + 5$) se numeşte *trinom*.

2) Considerăm polinomul:

$$5x - 4x^2 + 3 - 2x^4 + x^3.$$

El este format din cinci monoame, ale căror grade sînt respectiv: 1,2,0,4,3. Cel mai mare dintre aceste grade este 4; se spune că acest polinom este de gradul 4. Termenul care nu conţine x

(în acest exemplu, termenul +3) se numește *termen liber*.

Gradul unui polinom este gradul monomului său care are gradul cel mai mare.

3) Ştim că într-o sumă avem voie să schimbăm ordinea termenilor. Polinomul este şi el o sumă, deci putem schimba după voie ordinea termenilor săi. De obicei, termenii se scriu în ordinea crescătoare, sau în ordinea descrescătoare a gradelor. De exemplu, polinomul de mai sus se poate scrie:

$$-2x^4+x^3-4x^2+5x+3$$

şi se spune că polinomul *este ordonat după puterile descrescătoare ale lui x*. Acelaşi polinom se mai poate scrie:

$$3+5x-4x^2+x^3-2x^4.$$

Acum polinomul *este ordonat după puterile crescătoare ale lui x*.

42. **Adunarea şi scăderea polinoamelor.** Să considerăm expresia:

$$(2a-4b-3c)+(-3a+b-5c)-(a-2b+c).$$

Ea este formată din trei polinoame. Se cere să adunăm primul polinom cu al doilea, iar din suma lor să scădem pe cel de-al treilea.

Polinomul fiind o sumă algebrică, putem aplica regula cu privire la adunarea şi scăderea unei sume.

Desfacem parantezele. Paranteza care cuprinde primul polinom este de prisos; în faţa parantezei a doua avem semnul +, deci lăsăm la o parte semnul + şi paranteza şi luăm termenii din paranteză cu semnele lor; în faţa parantezei a treia avem semnul —, deci lăsăm la o parte semnul —

și paranteza și luăm termenii din paranteză cu semnele schimbate. Obținem:

$$2a - 4b - 3c - 3a + b - 5c - a + 2b - c.$$

Reducem termenii asemenea: $2a - 3a - a = -2a$; $-4b + b + 2b = -b$; $-3c - 5c - c = -9c$ și obținem rezultatul:

$$-2a - b - 9c.$$

E x e m p l u.
$5x - (x^2 - 3x + 2) + (-3x^2 + 5) - (2x - 4) =$
$= 5x - x^2 + 3x - 2 - 3x^2 + 5 - 2x + 4 =$
$= -4x^2 + 6x + 7.$

La reducerea termenilor asemenea, am luat întîi termenii în x^2, apoi termenii în x și la urmă termenii liberi, ca rezultatul să iasă ordonat după puterile descrescătoare ale lui x.

43. **Proba prin substituție.** Expresia dată și rezultatul trebuie să aibă valori numerice egale pentru orice valoare a lui x. Să facem proba în exemplul precedent, luînd, de exemplu, $x = 4$. Notînd expresia dată cu E (enunțul), avem:

$$E = 5 \cdot 4 - (4^2 - 3 \cdot 4 + 2) + (-3 \cdot 4^2 + 5) - (2 \cdot 4 - 4).$$

După efectuarea tuturor calculelor, se obține -33.

Înlocuim și în rezultat (pe care-l notăm cu R) pe x cu 4. Obținem:

$$R = -4 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 + 7 = -33.$$

Expresia dată și rezultatul au aceeași valoare numerică: proba a ieșit.

Această probă se numește *proba prin substituție*. Cu ajutorul ei se poate controla orice calcul algebric.

Cînd proba nu iese, lucrarea este greşită; cînd proba iese, s-ar putea întîmpla ca lucrarea să fie totuşi greşită. De exemplu, dacă greşeam lucrarea şi obţineam rezultatul (greşit) $-4x^2+5x+11$, înlocuind x prin 4, obţinem tot -33 Dar acest lucru se întîmplă rar.

44. Înmulţirea monoamelor. 1) Fie de înmulţit două puteri ale aceleiaşi baze, de exemplu:

$$a^3 \cdot a^2.$$

Fiecare factor reprezintă un produs: $a^3 = aaa$, $a^2 = aa$. Înmulţirea fiind asociativă, putem înlocui fiecare factor prin produsul respectiv. Obţinem: $a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, format din $3+2=5$ factori egali cu a, care este egal cu a^5, deci:

$$a^3 \cdot a^2 = a^5.$$

Pentru a înmulţi două puteri ale aceleiaşi baze, lăsăm baza neschimbată şi adunăm exponenţii.

Această regulă se exprimă prin formula:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Exemple: $b^4 \cdot b^2 = b^6$; $x^2 \cdot x^5 = x^7$;

$$a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = a^9.$$

2) În cazul înmulţirii:

$$a^5 \cdot a,$$

de exemplu, se pare că nu putem aduna exponenţii, căci al doilea factor nu are exponent. Dar această expresie reprezintă un produs de $5+1=6$ factori egali cu a, deci $a^5 \cdot a = a^6$. Pentru ca regula de înmulţire a puterilor să fie valabilă şi în acest caz, se consideră că factorul a are exponentul 1:

$$a = a^1.$$

Cînd un număr nu are nici un exponent, se consideră că el are exponentul 1.

În felul acesta, orice literă sau orice număr poate fi privit ca o putere.

E x e m p l e: $m^3 \cdot m = m^{3+1} = m^4$;

$$x^4 \cdot x \cdot x^2 = x^{4+1+2} = x^7.$$

Cînd puterile au baze diferite, ele nu pot fi înmulțite. De exemplu, a^2b^3 nu se poate scrie sub o formă mai simplă.

3) Fie acum de efectuat înmulțirea:

$$(-3a^2x)(+5ax^3y^2).$$

Înmulțirea este asociativă, adică putem înlocui fiecare din cele două produse prin factorii lor; obținem:

$$-3a^2x(+5)ax^3y^2.$$

Înmulțirea este comutativă, adică putem schimba după voie ordinea factorilor. O schimbăm astfel încît coeficienții să vină unul lîngă altul, de asemenea și puterile aceleiași baze. Luăm literele în ordine alfabetică și obținem:

$$(-3)(+5)a^2axx^3y^2.$$

Acum înlocuim factorii, care se pot înmulți, prin produsele lor: $(-3)(+5) = -15$; $a^2a = a^3$; $xx^3 = x^4$; y^2 rămîne neschimbat.

Deci: $(-3a^2x)(+5ax^3y^2) = -15a^3x^4y^2$.

În practică, rezultatul se scrie de-a dreptul.

Pentru a înmulți două monoame, înmulțim coeficienții între ei și puterile aceleiași baze între ele și înmulțim rezultatele. Cînd o literă figurează numai într-un singur monom, o copiem ca factor.

E x e m p l e. *a)* $(2ab^2)\left(-\frac{3}{7}b^3\right)=-\frac{6}{7}ab^5$.

Am zis: $2\left(-\frac{3}{7}\right)=-\frac{6}{7}$; a rămîne a; $b^2\cdot b^3=b^5$.

b) $5mx^2(-3xy^2)\left(-\frac{2}{5}yz^2\right)=6mx^3y^3z^2$.

Am zis: $5(-3)\left(-\frac{2}{5}\right)=6$; m rămîne m;

$$x^2\cdot x=x^3;\ y^2\cdot y=y^3;\ z^2 \text{ rămîne } z^2.$$

45. **Inmulțirea unui polinom cu un monom.** 1) Din aritmetică se știe că, pentru a înmulți o sumă cu un număr, se poate proceda ca în exemplele următoare:

$$(5+8+4)\cdot 3=5\cdot 3+8\cdot 3+4\cdot 3=$$
$$=15+24+12=51;$$
$$(12+7+3)\cdot 10=120+70+30=220.$$

Înmulțirea este *distributivă* față de adunare. Dacă reprezentăm numerele prin litere, avem:

$$(a+b+c)m=am+bm+cm.$$

Pentru cazul cînd a,b,c și m reprezintă numere naturale, acest rezultat se poate deduce din figura 12. În fiecare rînd sînt $a+b+c$ puncte și avem m rînduri. În total, avem

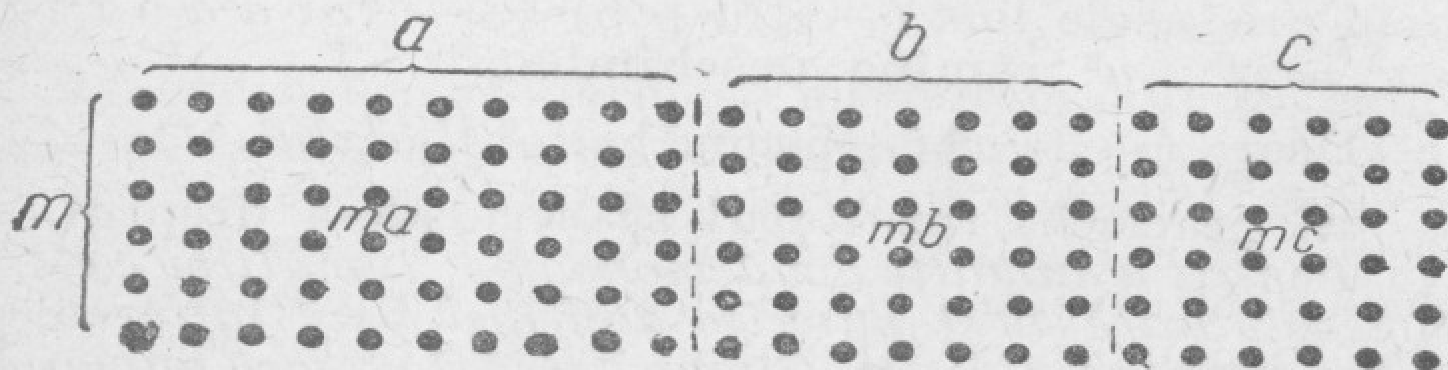


Fig. 12

$(a + b + c)m$ puncte. În prima despărțitură sînt am puncte, într-a doua sînt bm puncte, iar într-a treia, cm puncte, deci în total: $am + bm + cm$ puncte.

La fel se procedează cînd în paranteză se găsește o sumă algebrică, iar m reprezintă un număr rațional oarecare, pozitiv sau negativ (§25).

2) Fie acum de înmulțit un polinom cu un monom:

$$(3a - 5b + 6c)(-2a).$$

Expresia din prima paranteză reprezintă o sumă algebrică ($3a$, $-5b$ și $6c$ reprezintă niște numere), iar $-2a$ reprezintă de asemenea un număr, deci avem de înmulțit o sumă cu un număr; vom înmulți fiecare termen al sumei cu numărul. Zicem:

$$(3a)(-2a) = -6a^2;\ (-5b)(-2a) = +10ab;$$
$$(+6c)(-2a) = -12ac.$$

Rezultatul este:

$$-6a^2 + 10ab - 12ac.$$

În practică, rezultatul se scrie de-a dreptul.

Pentru a înmulți un polinom cu un monom, înmulțim toți termenii polinomului cu monomul și facem suma algebrică a rezultatelor.

Exemple:

a) $(-3x^2 + 2x + 5)(-4x) = 12x^3 - 8x^2 - 20x.$

b) $(5a - 2x + 4)\cdot 2ax = 10a^2x - 4ax^2 + 8ax.$

46. **Înmulțirea polinoamelor.** 1) Fie de făcut înmulțirea

$$(3 + 5 + 9)(7 + 4).$$

Dacă privim prima paranteză ca un singur număr ($3 + 5 + 9 = 17$), avem de înmulţit un număr cu o sumă. Vom înmulţi numărul cu fiecare termen al sumei; obţinem:

$$(3 + 5 + 9) \cdot 7 + (3 + 5 + 9) \cdot 4.$$

Procedăm la fel cu fiecare parte şi obţinem:

$$3 \cdot 7 + 5 \cdot 7 + 9 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 9 \cdot 4.$$

Această expresie se poate obţine direct, astfel: înmulţim numerele 3, 5 şi 9 cu 7, apoi cu 4 şi adunăm rezultatele. Dacă reprezentăm numerele prin litere, avem:

$$(a + b + c)(m + n) = am + bm + cm + an + bn + cn.$$

Pentru a înmulţi două sume neefectuate, înmulţim fiecare termen al primei sume cu fiecare termen al sumei a doua şi adunăm rezultatele.

În cazul numerelor naturale, această regulă se poate deduce din figura 13. Într-un rînd sînt $(a + b + c)$ puncte şi sînt $(m + n)$ rînduri, deci, în total:

$$(a + b + c)(m + n) \text{ puncte.}$$

În căsuţa de jos, din stînga, sînt m rînduri de cîte a puncte, în căsuţa din dreapta ei sînt bm puncte ş.a.m.d.

2) Regula de mai sus se bazează pe faptul că înmulţirea este distributivă faţă de adunare. Cum acest lucru este valabil şi în cazul numerelor raţionale oarecare, pozitive sau negative, rezultă că regula rămîne valabilă şi în cazul sumelor algebrice. La înmulţirea termenilor trebuie să ţinem

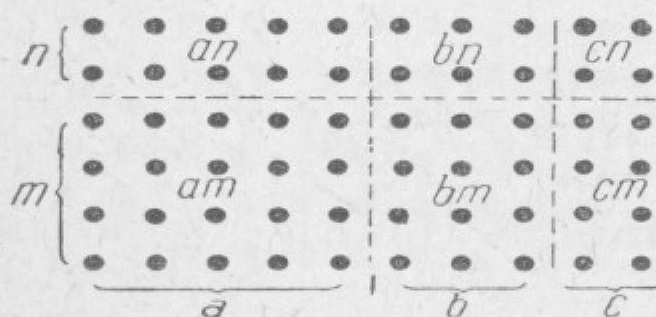


Fig. 13

seama de regula semnelor. Vom verifica acest lucru pe un exemplu:

$$(8-5+4)(2-6)=8\cdot 2-5\cdot 2+4\cdot 2-8\cdot 6+$$
$$+5\cdot 6-4\cdot 6=16-10+8-48+30-24=-28.$$

Dacă efectuăm mai întîi sumele, obținem: $8-5+4=7$; $2-6=-4$; $7\cdot(-4)=-28$, adică același rezultat.

3) Fie acum de înmulțit două polinoame, de exemplu:

$$(3m-2n-5p)(4n-3p).$$

Expresiile $3m$, $2n$ ş.a.m.d. reprezintă nişte numere, deci putem proceda după regula de mai sus. Zicem:

$$3m\cdot 4n=12mn;\ (-2n)4n=-8n^2 \text{ ş.a.m.d.}$$

Obținem: $12mn-8n^2-20np-9mp+6np+15p^2$.

Reducînd termenii asemenea, obținem:

$$12mn-8n^2-14np-9mp+15p^2.$$

Pentru a înmulți două polinoame, înmulțim fiecare termen al primului polinom cu fiecare termen al polinomului al doilea și facem suma algebrică a rezultatelor.

4) Cînd polinoamele sînt ordonate, lucrările se așază ca în exemplul de mai jos:

$$\begin{array}{l}
\underline{(3x^2-7x+4)(x^2+3x-5)}\\
3x^4-7x^3+4x^2\\
\qquad+9x^3-21x^2+12x\\
\qquad\qquad\underline{-15x^2+35x-20}\\
3x^4+2x^3-32x^2+47x-20.
\end{array}$$

Am înmulțit toți termenii primului polinom cu x^2 și am scris rezultatul în rîndul întîi de sub

linie; apoi am înmulţit toţi termenii primului polinom cu $3x$ şi am scris rezultatul în rîndul al doilea, avînd grijă ca termenii asemenea să fie aşezaţi unul sub altul; în sfîrşit, am procedat în mod analog cu -5. Am redus termenii asemenea şi am scris rezultatul sub linie.

47. **Aplicaţii.** 1) Cînd sînt de efectuat mai multe operaţii cu monoame şi polinoame, se respectă regula cu privire la ordinea operaţiilor stabilită pentru numere, căci monoamele şi polinoamele reprezintă tot numere.

Fie, de exemplu, de calculat:

$$2(3a-2b)-5(-2a+b)+4(a-2b)-3(4a-b).$$

Efectuăm înmulţirile scriind rezultatele unul după altul*:

$$6a-4b+10a-5b+4a-8b-12a+3b.$$

Reducem termenii asemenea şi obţinem rezultatul: $8a-14b$.

48. **Ridicarea unui monom la o putere.** 1) Fie de calculat:

$$(a^2)^3.$$

Trebuie să efectuăm înmulţirea $a^2a^2a^2$, care dă $a^{2+2+2}=a^6$. Numărul 6 a apărut ca suma a 3 termeni egali cu 2, adică $2\cdot 3$. Numărul 2 este primul exponent, 3 este al doilea exponent, iar 6 este produsul lor.

Pentru a ridica o putere la o altă putere, lăsăm baza neschimbată şi înmulţim exponenţii între ei.

---

* Mai amănunţit, avem o sumă de 4 termeni: $2(3a-2b)$, $-5(-2a+b)$, $4(a-2b)$, $-3(4a-b)$, care sînt respectiv egali cu: $6a-4b$, $+10a-5b$, $+4a-8b$, $-12a+3b$. În text s-a scris de-a dreptul suma algebrică a acestor expresii.

Această regulă se exprimă prin formula:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Exemple. $(x^5)^2 = x^{10}$; $(a^4)^3 = a^{12}$.

2) Fie de calculat:

$$(-2a^2b)^3.$$

Trebuie să înmulțim între ei trei factori egali cu $-2a^2b$. Avem:

$$(-2a^2b)(-2a^2b)(-2a^2b) = (-2)(-2)(-2)\cdot$$
$$\cdot a^2a^2a^2bbb = (-2)^3(a^2)^3b^3 = -8a^6b^3.$$

-8 este puterea a treia a lui (-2); a^6 este puterea a treia a lui a^2; iar b^3 este puterea a treia a lui b. Deci:

Pentru a ridica un monom la o putere, ridicăm fiecare factor la acea putere și înmulțim rezultatele.

Exemple.

$$(-3x^2)^2 = +9x^4;\ \left(\frac{2}{3}a^2x\right)^3 = \frac{8}{27}a^6x^3.$$

Calcul prescurtat

49. Unele calcule algebrice se fac pe baza unor formule speciale, care ne dau posibilitatea să scriem rezultatul de-a dreptul. În paragrafele care urmează dăm cîteva dintre aceste formule.

50. **Produsul sumei cu diferența.** Considerăm înmulțirea:

$$(a+b)(a-b),$$

unde primul binom reprezintă suma a doi termeni, a și b, iar binomul al doilea reprezintă diferența acelorași termeni. Dacă efectuăm înmulțirea, obținem:

$$a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Avem deci identitatea (formula):

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

În practică, această formulă se aplică astfel: Fie de calculat:

$$(x+3)(x-3).$$

În locul lui a avem x, iar în locul lui b avem 3. Ca rezultat, în locul lui a^2 punem x^2, iar în locul lui b^2 punem $3^2=9$. Deci:

$$(x+3)(x-3)=x^2-9.$$

51. **Aplicații.** 1) În locul literelor a și b pot fi expresii algebrice mai complicate. De exemplu:

$$(3x+5y)(3x-5y).$$

În locul lui a avem $3x$, iar în locul lui b avem $5y$. Rezultatul se obține astfel: în locul lui a^2 se pune $(3x)^2$ adică $9x^2$, iar în locul lui b^2 se pune: $(5y)^2$ adică $25y^2$. Deci:

$$(3x+5y)(3x-5y)=9x^2-25y^2.$$

În practică, rezultatul se scrie de-a dreptul.

2) Fie de făcut înmulțirea $31 \cdot 29$.

$$31=30+1, \text{ iar } 29=30-1, \text{ deci:}$$

$$31 \cdot 29=(30+1)(30-1)=30^2-1^2=900-1=899.$$

Acest calcul se poate face în gînd.

3) Formula $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ poate fi citită de la dreapta spre stînga:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Sub forma aceasta, ea ne arată cum se poate transforma o diferență de pătrate într-un produs. Fie, de exemplu, expresia:

$$25a^2 - 16b^2;$$

$25a^2$ este pătratul lui $5a$, iar $16b^2$ este pătratul lui $4b$. Deci:

$$25a^2 - 16b^2 = (5a + 4b)(5a - 4b).$$

52. **Pătratul binomului**[1]. Avem:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2.$$

Deci: $\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Această identitate ne arată cum se ridică la pătrat o sumă de doi termeni. Fie, de exemplu, de calculat:

$$(5m + 3x)^2.$$

În locul lui a avem $5m$, iar în locul lui b avem $3x$. În locul lui a^2 punem $(5m)^2$, adică $25m^2$, în locul lui $2ab$ punem $2 \cdot 5m \cdot 3x = 30mx$, iar în locul lui b^2 punem $(3x)^2$ adică $9x^2$. Deci:

$$(5m + 3x)^2 = 25m^2 + 30mx + 9x^2.$$

În practică, rezultatul se scrie de-a dreptul.

53. **Aplicații.** 1) Un număr de două cifre poate fi privit ca un binom. De exemplu: $74 = 70 + 4$; $23 = 20 + 3$.

---

[1] Aci cuvîntul *binom* se folosește într-un sens mai larg, ca sumă sau diferență de doi termeni.

Regula după care se ridică un binom la pătrat ne permite să scriem direct pătratul oricărui număr de două cifre.

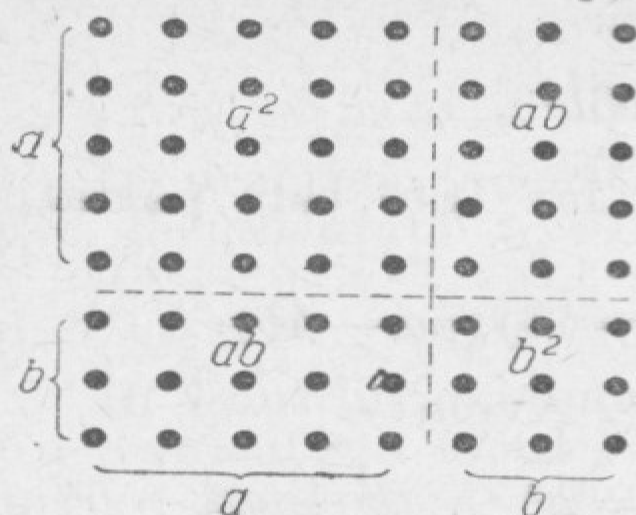


Fig. 14

Fie, de exemplu, de calculat 37^2, care este $(7+30)^2$.

Avem: $7^2=49$; $2\cdot7\cdot30=$ $=420$; $30^2=900$;

$$49+420+900=1\ 369.$$

În practică, procedăm astfel: 7^2 face 49... scriem 9 și ținem 4; $2\cdot7\cdot3=42$... și cu 4 (pe care-l ținem) face 46... scriem 6 (la stînga lui 9) și ținem 4; $3^2=9$... și cu 4 (pe care-l ținem) face 13... scriem 13 (la stînga lui 69). Astfel apare direct rezultatul 1 369.

Figura 14 dă o ilustrare a formulei pentru $(a+b)^2$ cînd a și b sînt numere naturale.

2) Avem:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=$$
$$=a^2-2ab+b^2.$$

Deci:

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

Această identitate ne arată cum se ridică o diferență la pătrat. Se procedează ca în cazul sumei, numai că termenul mijlociu are semnul —.

E x e m p l u.

$$(2x-5y)^2=4x^2-20xy+25y^2.$$

54. *Aplicație la calcule cu aproximație*. Să observăm întîi că, dacă ridicăm o fracție subunitară la o putere, obținem un rezultat mai mic decît acea fracție.

Exemple:

$$0{,}2^2 = 0{,}04 < 0{,}2; \quad 0{,}2^3 = 0{,}008 < 0{,}2;$$
$$0{,}1^4 = 0{,}0001 < 0{,}1.$$

1) Pornim de la formula:

$$(1 + a)(1 - a) = 1 - a^2.$$

Dacă împărţim produsul la unul din factori, obţinem celălalt factor:

$$\frac{1 - a^2}{1 + a} = 1 - a; \qquad \frac{1 - a^2}{1 - a} = 1 + a.$$

Dacă a este un număr pozitiv mic în comparaţie cu 1, a^2 este şi mai mic, deci nu facem o greşeală prea mare dacă neglijăm (lăsăm la o parte) termenul a^2. Obţinem astfel egalităţile aproximative*:

$$\frac{1}{1 + a} \approx 1 - a; \qquad \frac{1}{1 - a} \approx 1 + a.$$

Exemple.

$$\frac{1}{1{,}003} \approx 0{,}997; \qquad \frac{1}{0{,}9992} \approx 1{,}0008$$

În primul exemplu, $a = 0{,}003$; în exemplul al doilea, $a = 0{,}0008$.

2) Avem:

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2; \quad (1 - a)^2 = 1 - 2a + a^2.$$

Dacă a este un număr pozitiv mic în comparaţie cu 1, putem neglija termenul a^2. Obţinem egalităţile aproximative:

$$(1 + a)^2 \approx 1 + 2a; \quad (1 - a)^2 \approx 1 - 2a.$$

---

* Semnul $\approx$ se citeşte: „Este aproximativ egal cu..."

E x e m p l e. $1{,}004^2 \approx 1{,}008$; $0{,}9997^2 \approx 0{,}9994$.

În primul exemplu, $a = 0{,}004$; în exemplul al doilea $a = 0{,}0003$.

Rezultatele exacte sînt: $1{,}004^2 = 1{,}008016$; $0{,}9997^2 = 0{,}99940009$.

55. **Împărțirea monoamelor.** 1) Fie de făcut împărțirea:

$$a^6 : a^2.$$

Trebuie să găsim o putere a lui a care, înmulțită cu a^2, să dea a^6. Dar la înmulțire exponenții se adună. Trebuie deci să găsim un exponent, care, adunat cu 2, să dea 6. Acest exponent este $6-2=4$. Rezultă că:

$$a^6 : a^2 = a^{6-2} = a^4.$$

Pentru a împărți o putere printr-o altă putere care are aceeași bază, lăsăm baza neschimbată și scădem exponentul împărțitorului din exponentul deîmpărțitului.

Această regulă se exprimă prin formula:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

E x e m p l e. $b^4 : b^2 = b^2$; $x^7 : x^3 = x^4$.

În cazul unei împărțiri ca $x^3 : x$, în care împărțitorul nu are exponent, se consideră că are exponentul 1. Deci $x^3 : x = x^2$ (am scăzut 1 din 3).

Formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ are înțeles numai cînd $m > n$. În cazul

$$a^3 : a^3,$$

de exemplu, unde exponenții sînt egali, ar apărea exponentul $3-3=0$. Dar nu avem nevoie de

regulă. Deîmpărţitul fiind egal cu împărţitorul, cîtul este 1; deci $a^3 : a^3 = 1$.

2) Fie acum de făcut împărţirea:

$$-10a^3b^2c : 5ab^*.$$

Trebuie să găsim un monom care, înmulţit cu $5ab$, să dea $-10a^3b^2c$. Îl găsim astfel: $(-10):(+5) = -2$; $a^3 : a = a^2$; $b^2 : b = b$; c rămîne c. Deci:

$$(-10a^3b^2c):(+5ab) = -2a^2bc.$$

E x e m p l e. a) $(-3x^2y^2):(-4x) = \frac{3}{4}xy^2$.

Am zis: $(-3):(-4) = \frac{3}{4}$; $x^2 : x = x$; y^2 rămîne y^2.

b) $5a^2bc^3 : 6abc^3 = \frac{5}{6}a$.

Am zis: $5 : 6 = \frac{5}{6}$; $a^2 : a = a$; $b : b = 1$; $c^3 : c^3 = 1$.

Factorii egali cu 1 nu se scriu.

3) Fie de făcut împărţirea:

$$10a^2 : 2ab.$$

---

* În unele cărţi de aritmetică se spune că, dacă într-o expresie sînt indicate mai multe operaţii de acelaşi ordin, ele se fac în ordinea în care sînt scrise. Ar însemna să împărţim deîmpărţitul prin 5, iar rezultatul să-l înmulţim cu a, apoi cu b. Expresia noastră arată însă altceva, şi anume că monomul $-10a^3b^2c$ trebuie împărţit prin monomul $5ab$. Regula despre ordinea operaţiilor ar cere să se scrie $(-10a^3b^2c):(5ab)$, pentru a arăta că deîmpărţitul se împarte prin tot produsul. Totuşi, nu se pun paranteze. În cazul expresiei $(-10a^3b^2c):(+5ab)$, paranteza este necesară pentru a despărţi semnul : de semnul + care urmează.

Orice monom am înmulți cu $2ab$, vom obține un produs care va conține factorul b, deci nu vom obține $10a^2$ (care nu conține factorul b). Această împărțire* nu se poate face.

56. **Împărțirea unui polinom printr-un monom.** Fie împărțirea:

$$(8a^2 - 6ab + 3ac) : (-2a).$$

Expresia din prima paranteză este o sumă algebrică, iar expresia din paranteza a doua este un număr. Deci aplicăm regula după care se împarte o sumă printr-un număr (v. § 28). Zicem:

$8a^2 : (-2a) = -4a; \quad -6ab : (-2a) = +3b;$

$+3ac : (-2a) = -\frac{3}{2}c$. Rezultatul este:

$$-4a + 3b - \frac{3}{2}c.$$

În practică, rezultatul se scrie de-a dreptul.

Pentru a împărți un polinom printr-un monom, împărțim fiecare termen al polinomului prin acel monom și facem suma algebrică a rezultatelor.

Cînd măcar unul din termenii polinomului nu se poate împărți prin împărțitor, împărțirea nu se poate face.

E x e m p l e:

a) $(5x^4 - 12x^3 + 18x^2) : 3x^2 = \frac{5}{3}x^2 - 4x + 6;$

b) $(-14ax^2 + 6a^2x - 10ax) : (-2ax) = 7x - 3a + 5.$

57. **Factor comun.** Considerăm expresia:

$$ab + ac.$$

---

* Este vorba de împărțirea întreagă.

Ambii termeni conțin factorul a. Se spune că a este un *factor comun*. Această expresie este egală cu:

$$a(b+c),$$

căci, dacă efectuăm înmulțirea, obținem expresia dată.

Se spune că *am scos factorul comun* a, sau *am scos factorul* a *în fața parantezei*. După ce am scris a în fața parantezei, am împărțit expresia dată prin a și am scris cîtul în paranteză.

Pentru a scoate un factor comun dintr-o sumă algebrică, acel factor se scrie în fața parantezei, iar în paranteză se scrie cîtul împărțirii expresiei date prin factorul comun.

E x e m p l e. *a*) Considerăm expresia:

$$6x^3-8x^2.$$

Ambii coeficienți sînt divizibili prin 2, iar părțile literale din ambii termeni sînt divizibile cu x^2. Luăm ca factor comun $2x^2$ și obținem:

$$6x^3-8x^2=2x^2(3x-4).$$

Pentru a obține expresia din paranteză, zicem:

$$6x^3:2x^2=3x; \qquad -8x^2:2x^2=-4;$$

b) $6ab^2-12a^2b+15a^2b^2=3ab\,(2b-4a+5ab)$;

c) $ax+a=a(x+1)$.

58. **Cel mai mic multiplu comun**. Luăm, de exemplu, numerele 90, 84 și 150. Descompuse în factori primi, ele sînt:

$$90=2\cdot3^2\cdot5;$$
$$84=2^2\cdot3\cdot7;$$
$$150=2\cdot3\cdot5^2.$$

Pentru a afla c.m.m.m.c., se iau toţi factorii primi cîte o singură dată, cu exponentul cel mai mare, deci:

$$\text{c.m.m.m.c.} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6\,300.$$

Pentru a afla c.m.m.m.c. a două sau mai multe expresii algebrice, le descompunem în factori, apoi aplicăm aceeaşi regulă ca în aritmetică.

Exemple.

a) Fie monoamele $8a^2$, $6ab$, $12ab^2$. Avem:

$$\begin{array}{r} 8a^2 = 2^3 a^2 \\ 6ab = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b \\ \underline{12ab^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2} \\ \text{c.m.m.m.c.} = 2^3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b^2 = 24a^2b^2. \end{array}$$

b) Să căutăm c.m.m.m.c. al binoamelor: $3a - 3b$, $6a - 6b$, $ab - b^2$. Scoatem din fiecare binom factorul comun:

$$\begin{array}{r} 3a - 3b = 3\,(a - b) \\ 6a - 6b = 6\,(a - b) \\ \underline{ab - b^2 = b\,(a - b)} \\ \text{c.m.m.m.c.} = 6b(a - b). \end{array}$$

EXERCIŢII

Monoame

1. Să se efectueze următoarele adunări şi scăderi de monoame:

a) $5x + 3x$; *b*) $4a + 2a$; *c*) $5b - 3b$;
d) $-3a^2 + a^2$; *e*) $5ab - ab$; *f*) $8m - 7m$;
g) $6x - 8x$; *h*) $7p - 3p$; *i*) $3a^2 - 4a^2$.

2. Să se calculeze:

a) $6b - 2b - 5b + 8b$;
b) $-4x^2 + 9x^2 - 3x^2 - x^2$;
c) $7ay - 10ay - 2ay + 3ay$;
d) $-2mn + 4mn - 3mn - mn$;
e) $-ax + 5ax - 6ax + 2ax$;
f) $4x^2 + 2x^2 - 7x^2 + 3x^2$.

3. Capacitatea unei găleţi este de c litri. Un butoi conţine 15 găleţi de apă. Se adaugă 4 găleţi, apoi se scot 7 găleţi, se adaugă 3 găleţi şi se scot 14 găleţi. Cîţi litri de apă au fost în butoi, cîţi litri s-au adăugat sau scos de fiecare dată şi cîţi litri de apă au rămas în butoi?

4. O gospodărie agricolă colectivă cultivă grîu pe trei tarlale: una de 80 ha, a doua de 125 ha şi a treia de 130 ha. Producţia medie la hectar este de p kg. Cîte kilograme de grîu produce fiecare tarla? Cît produce întreaga suprafaţă cultivată?

5. Într-un metru cub de zidărie intră x cărămizi. La o construcţie s-au făcut trei pereţi de 18,5 m³, 7,3 m³ şi 8,6 m³. Cîte cărămizi au intrat în fiecare perete? Cîte cărămizi au intrat în total?

6. O ladă de zahăr conţine x kg, iar 1 kg de zahăr costă y lei. La un magazin s-au adus 8 lăzi de zahăr, apoi 5 lăzi şi pe urmă 7 lăzi şi din ele s-au vîndut 12 lăzi. Să se afle cît valorează fiecare transport, cît valorează zahărul vîndut şi cît valorează zahărul rămas.

7. Un camion transportă a saci de ciment, iar un sac de ciment are x kg. Pe un şantier de locuinţe muncitoreşti s-au descărcat: luni 5 cami-

oane, marţi 7 camioane, miercuri 6 camioane şi joi 10 camioane. Cîţi saci de ciment s-au descărcat în fiecare zi şi cîţi saci în total? Cîte kilograme de ciment s-au descărcat în fiecare zi şi cîte în total?

Polinoame

8. Să se ordoneze polinoamele următoare după puterile descrescătoare ale lui x:

a) $-6x+2x^3+x^2-5x^4+4$;

b) $4x^2-12+6x+x^3-2x^5$.

9. Să se ordoneze polinoamele următoare după puterile crescătoare ale lui x:

a) $-18-5x^4+3x^2+8x-2x^3$;

b) $3x+8x^5-2x^3+4x^2-x^4$.

10. Să se reducă termenii asemenea din polinoamele următoare:

a) $2x-6+3y+10-5x-4y+1$;

b) $8m-3n+5p-4p+7n-10m-3n+8m-p$;

c) $2y^2-6y+3-8+5y^2+4y-2y+y^2+2y^2+7$.

11. Să se efectueze următoarele adunări şi scăderi de polinoame:

a) $(x-2)+(3x-1)-(2-4x)+(x+5)$;

b) $(3x+2y)+(x-2y)-(2x-y)$;

c) $(a^2-3a+2)+(-2a^2+a+1)-(-4a+a^2-3)$;

d) $(2xy-5)-(x+3-4xy)+(-xy-x+2)-$
$-(-2xy+x)$.

---

11. *a)* $9x$; *b)* $2x+y$; *c)* $-2a^2+2a+6$;
d) $7xy-3x-6$.

12. Se dau polinoamele:

$A = 2x^3 - x + 2$; $B = 3x^2 - 4x - 5$; $C = -4x^3 + 7$.

Să se calculeze:

a) $A + B + C$; *b)* $A - B - C$; *c)* $A + B - C$.

13. Să se scrie sub formă de expresie ordonată după puterile descrescătoare ale lui 10 numerele:

a) 8 372; *b)* 3 056; *c)* 18 259; *d)* 6 005.

14. Luăm două numere oarecare, de exemplu 9 și 5. Avem:

$9 + 5 = 14$; $9 - 5 = 4$; $14 + 4 = 18$; $14 - 4 = 10$.

18 este dublul lui 9, iar 10 este dublul lui 5. Să se cerceteze dacă acest lucru se adeverește și în alte cazuri. Să se demonstreze acest lucru, notînd numerele cu a și b și făcînd cu ele aceleași operații ca în exemplul dat.

15. Luăm trei numere oarecare, de exemplu: 5, 10 și 12. Avem: $5 + 10 - 12 = 3$; $5 + 12 - 10 = 7$; $10 + 12 - 5 = 17$; $3 + 7 + 17 = 27$. Suma numerelor pe care le-am luat este tot 27. Să se verifice acest fapt și pe alte exemple. Să se arate că ceea ce s-a constatat pe aceste exemple se adeverește totdeauna.

16. Luăm două numere oarecare, de exemplu 7 și 10. Avem:

$2 \cdot 7 - 10 = 4$; $2 \cdot 10 - 7 = 13$; $4 + 13 = 17$.

---

12. *a)* $-2x^3 + 3x^2 - 5x + 4$; *b)* $6x^3 - 3x^2 + 3x$; *c)* $6x^3 + 3x^2 - 5x - 10$.

Suma celor două numere pe care le-am luat este tot 17. Să se demonstreze că acest fapt se adeverește, oricare ar fi numerele pe care le luăm la început.

17. Se consideră suma a două numere oarecare a și b. Adăugăm la a un număr oarecare n, scădem din b același număr și calculăm suma acestor numere. Să se compare această sumă cu suma numerelor a și b. Ce proprietate a adunării apare aici?

18. Se consideră două numere oarecare a și b. Adăugăm atît la a cît și la b un număr oarecare n și facem diferența dintre aceste sume. Să se compare această diferență cu diferența dintre numerele luate la început. Aceeași chestiune, dacă scădem atît din a cît și din b același număr n. Ce proprietate a scăderii apare aici?

19. Să se demonstreze că, dacă la un număr de două cifre, în care cifra zecilor este mai mare decît cifra unităților, adăugăm diferența cifrelor, obținem un număr divizibil cu 11. Să se dea exemple: cum trebuie procedat cînd cifra unităților este mai mare?

20. Să se demonstreze că: a) un număr de 3 cifre, în care cifra zecilor este zero, iar cifra sutelor este egală cu cifra unităților, este divizibil cu 101; b) un număr de 4 cifre, în care prima cifră este egală cu ultima, iar cele două cifre de

---

19. Un monom este divizibil prin fiecare dintre factorii săi. Exemplu: $3xy$ este divizibil prin 3, prin x și prin y, x și y fiind numere întregi. $(10a + b) + (a - b) = 11a$ este divizibil cu 11; $10a + b - (b - a) = 11a$. **20.** Numărul este de forma: $100a + a = 101a$.

la mijloc sînt zerouri, este divizibil cu 1 001. Să se stabilească o proprietate asemănătoare a numerelor de 5 cifre, 6 cifre ş.a.m.d.

21. Să se demonstreze că: *a*) un număr de două cifre, în care cele două cifre sînt egale între ele, este divizibil cu 11; *b*) un număr de trei cifre, în care toate cifrele sînt egale între ele, este divizibil cu 111. Să se extindă această proprietate asupra numerelor de 4 cifre, 5 cifre ş.a.m.d.

22. Să se demonstreze că, dacă două numere împărţite la 8 dau acelaşi rest, diferenţa lor este divizibilă cu 8. Extindere pentru cazul cînd, în locul lui 8, se consideră un număr oarecare.

23. Într-o familie sînt doi fraţi, unul are x ani, iar celălalt are y ani ($x>y$). Ce vîrstă va avea fiecare din ei peste n ani şi care va fi atunci diferenţa dintre vîrstele lor? Ce vîrstă a avut fiecare din ei cu n ani în urmă şi care a fost atunci diferenţa dintre vîrstele lor? Să se compare aceste diferenţe cu diferenţa dintre vîrstele lor de acum.

24. Într-o familie sînt doi fraţi, A şi B. Luăm cazul cînd A are 13 ani şi B are 17 ani. Cîţi ani a avut A cînd B a avut 13 ani? Cîţi ani va avea B cînd A va avea 17 ani? Să se compare suma acestor vîrste cu suma vîrstelor de acum a celor doi fraţi. Să se ia şi alte exemple. Să se noteze vîrstele celor doi fraţi cu x şi y şi să se demonstreze că ceea ce s-a constatat pe aceste exemple se adevereşte totdeauna.

---

24. $x - (y - x) = 2x - y$; $y + (y - x) = 2y - x$; $2x - y + 2y - x = x + y$.

30. Să se efectueze și să se facă proba prin substituție dînd literelor valori oarecare:

a) $(x+2)(x+3)$; *b)* $(a-1)(a+2)$;

c) $(1-b)(2b+1)$; *d)* $(2x+1)(2x-3)$;

e) $(x^2-3x+2)(2x-3)$; *f)* $(a^2-4a+2)(a^2+4a+2)$;

g) $(4x^2-6xy+9y^2)(2x+3y)$;

h) $(a^2+2ab+4b^2)(a-2b)$.

31. Să se efectueze înmulțirile următoare, așezînd lucrările ca la § 46; 4). Se va face proba prin substituție.

a) $(8x^3+4x^2+2x+1)(2x-1)$;

b) $(3x^2-4x+1)(-2x^2+3x-4)$;

c) $(x^2+x+2)(3x^2-4x-2)$;

d) $(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)$;

e) $(32a^5+16a^4+8a^3+4a^2+2a+1)(2a-1)$.

32. Să se efectueze și să se facă proba prin substituție:

a) $(x^2+1)(2x-1)-(x^2+x+2)(x-2)-x(x^2+2)$;

b) $(2x^2-x+3)(x-2)-3(x^2-x+1)+3x(x+1)$;

c) $(x^2+x+1)(x-2)-(x^2-x+1)(2x-1)$.

33. Să se efectueze:

a) $(2x+y)(x-2y)(x+y)$;

b) $(a+b)(a-2b)(3a-2b)$;

c) $(x+1)(2x-1)(x+2)-(x-1)(2x+1)(x-2)$.

---

30. *e)* $2x^3-9x^2+13x-6$; *f)* a^4-12a^2+4; *g)* $8x^3+27y^3$; *h)* a^3-8b^3. **32.** *a)* $+3$; *b)* $2x^3+16x-9$; *c)* $-x^3+2x^2-4x-1$; **33.** *a)* $2x^3-x^2y-5xy^2-2y^3$; *b)* $3a^3-5a^2b-4ab^2+4b^3$; *c)* $10x^2-4$.

34. Să se calculeze:

a) $(x+1)(x-1)$; *b*) $(a+2)(a-2)$;

c) $(y-3)(y+3)$; *d*) $(2m-1)(2m+1)$;

e) $(3x+2)(3x-2)$; *f*) $(a+c)(a-c)$;

g) $(x+2a)(x-2a)$; *h*) $(x^2+2y)(x^2-2y)$;

i) $(ab+5)(ab-5)$.

35. Să se calculeze:

a) $(x+1)(x-1)(x^2+1)$;

b) $(a+3)(a-3)(a^2+9)$;

c) $(2b-3)(2b+3)(4b^2+9)$;

d) $(m-n)(m+n)(m^2+n^2)$.

36. Să se pună sub formă de produs:

a) m^2-25; *b*) $4x^2-1$; *c*) a^2-16x^2;

d) $9x^2-4c^2$; *e*) b^4-1; *f*) $16x^2-y^2$.

37. Să se calculeze:

a) 37^2-35^2; *b*) $8\,315^2-8\,314^2$; *c*) $3{,}18^2-2{,}18^2$

d) 387^2-377^2; *e*) $\left(7\frac{5}{8}\right)^2-\left(2\frac{3}{8}\right)^2$; *f*) 87^2-13^2.

38. Să se calculeze mintal, pe baza formulei $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, produsele:

a) $51\cdot49$; *b*) $52\cdot48$; *c*) $27\cdot33$;

d) $5\frac{3}{4}\cdot6\frac{1}{4}$; *e*) $3{,}1\cdot2{,}9$; *f*) $9{,}7\cdot10{,}3$;

g) $5{,}8\cdot6{,}2$

39. Să se calculeze:

a) $(x+1)^2$; e) $(2p+1)^2$; i) $(5x+2a)^2$;
b) $(a+2)^2$; f) $(a+3x)^2$; j) $(x^2+3y^2)^2$;
c) $(m+3)^2$; g) $(a+2b)^2$; k) $(3a^2+5m)^2$;
d) $(m+4)^2$; h) $(2a+3x)^2$; l) $(2ab+3c)^2$.

40. Să se calculeze:

a) $(3x-1)^2$; b) $(2a-3b)^2$; c) $(5m^2-3)^2$;
d) $(2a^2-2{,}5x^3)^2$; e) $(b^3-2ac)^2$; f) $(5x^2+3y^2z)^2$.

41. Să se efectueze şi să se facă proba prin substituţie:

a) $(2x+1)(x-2)-(x+1)(x-1)$;
b) $3(a-2)(a+2)-2(2a+1)(2a-1)$;
c) $(y+3)(2y-1)-(y+2)^2$;
d) $3(m+1)^2+2(m-1)^2-4(m-2)^2$;
e) $2(a+c)(a-c)+5(a+2c)(a-2c)-$
$-3(2a-c)(2a+c)$;
f) $x(2x-1)^2+2x(x+1)(x-1)-3x(x-2)^2$.

42. Să se calculeze prin două metode, efectuînd înmulţirea şi aplicînd formulele de calcul prescurtat:

a) $(x+3)(x-3)$; b) $(2a+1)(2a-1)$;
c) $(3a+2)^2$; d) $(5x-2)^2$.

---

41. *a)* x^2-3x-1; *b)* $-5a^2-10$; *c)* y^2+y-7; *d)* $m^2+18m-11$; *e)* $-5a^2-19c^2$; *f)* $3x^3+8x^2-13x$.

43. Să se calculeze după procedeul de la § 53:

a) 38^2; *b*) 52^2; *c*) 29^2; *d*) 46^2; *e*) 87^2; *f*) 73^2.

44. Să se calculeze valorile aproximative ale expresiilor următoare (v. § 54):

a) $1{,}01^2$; *b*) $1{,}0005^2$; *c*) $1{,}04^2$; *d*) $0{,}9997^2$; *e*) $0{,}994^2$; *f*) $1:1{,}0002$; *g*) $1:1{,}0007$; *h*) $1:0{,}999$; *i*) $1:0{,}99998$.

45. $73^2 = 5\,329$; $24^2 = 576$. Diferența acestor numere, adică 4 753, va fi un număr prim sau compus? În general, o diferență de pătrate perfecte este un număr prim sau neprim?

46. Să se demonstreze că:

a) pătratul unui număr cu soț este divizibil cu 4; pătratul unui număr divizibil cu 3 este divizibil cu 9; pătratul unui număr divizibil cu 4 este divizibil cu 16 ş.a.m.d.;

b) pătratul unui număr fără soț este un număr fără soț.

47. Să se demonstreze că un pătrat perfect, împărțit prin 4, dă restul zero sau 1 și niciodată 2 sau 3.

Indicație. Se va examina pe rînd cazul cînd numărul este cu soț ($2k$) și cel cînd este fără soț ($2k + 1$).

48. Două numere naturale consecutive, de exemplu 25 și 26 sau 80 și 81, pot fi amîndouă pătrate perfecte?

---

45. Neprim. **46.** *b)* $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$; primii doi termeni sînt cu soț, iar 1 este fără soț.

47. V. problema 46.

Indicație. Dacă cel mai mic dintre cele două numere este pătratul lui x, pătratul perfect următor cel mai apropiat va fi $(x+1)^2$. Care este valoarea cea mai mică pe care o poate lua diferența lor?

49. Să se ia la rînd pătratele perfecte: $1^2=1$; $2^2=4$; $3^2=9$ ș.a.m.d. și să se afle resturile împărțirii lor prin 3. Ce se observă? Să se demonstreze că un pătrat perfect, împărțit prin 3, dă restul zero sau 1 și niciodată 2.

Indicație. Orice număr natural este de forma $3k$, sau $3k+1$, sau $3k+2$. Se ridică aceste expresii la pătrat și se află restul împărțirii prin 3.

Împărțirea. Factor comun

50. Să se efectueze împărțirile următoare:

a) $6x:2$; *b)* $10a:(-2)$; *c)* $(-6x):(-3)$;
d) $7a^3:a$; *e)* $10a:(-2a)$; *f)* $(3a^2b^3):ab$;
g) $8a^2bc:(-4abc)$; *h)* $-20m^2np:5mp$.

51. *a)* $(6x^3-8x^2+10x):2x$;
b) $(15a^2x-12ax^2+18ax):(3ax)$;
c) $(24m^3-18m^2+30m):6m^2$;
d) $(6ab^2-15a^2b+12a^2b^2-3ab^3):(-3ab)$.

52. Să se descompună în factori (prin scoaterea factorului comun):

a) $5x-5y$; *b)* $3m+3n$; *c)* $4a-4b$;
d) $3m-15$; *e)* $7p-35$; *f)* $8y-12$;
g) $ax+bx$; *h)* $mx-my$; *i)* $3ax-6ay$;
j) $ab-a$; *k)* $ax+ay-az$; *l)* $3x+6y-3$.

53. Să se descompună în factori:

a) $x^3 - x^2$; *b)* $3a - 3a^2$;
c) $5x^3 - 10x^2 + 15x$; *d)* $m^3 + m^2 + m$;
e) $(a+b)x + (a+b)y$; *f)* $(a-x)m + (a-x)n$;
g) $3(a+b+1) + x(a+b+1)$.

54. Să se descompună în factori:

a) $ax + ay + bx + by$; *b)* $ma - mb + na - nb$;
c) $2ax + bx + 2ay + by$;
d) $3x^2 + 6xy + 4ax + 8ay$.

55. Să se descompună în factori:

a) $x^2 - 1$; *b)* $m^2 - 9$; *c)* $4a^2 - 25$.

56. Să se afle c.m.m.m.c. al monoamelor:

a) $3x, 2x, 4x$; *b)* a, a^2, a^3;
c) $6m, 3m^2, 2m$; *d)* x^2, xy, y^2;
e) $2a, 4b, 6$; *f)* $6a^2, 4a, 6b^2$;
g) $4m^2, 2m, 8n^2$; *h)* $12ax, 4a^2, 3x^2$.

57. Să se afle c.m.m.m.c. al expresiilor:

a) 3 și $a+b$; *b)* $x+1$ și 2; *c)* $3x+3$ și 6;
d) $2x+4$, $3x+6$ și $4x+8$;
e) $ax+ay$, $4x+4y$, $2x+2y$ și $bx+by$.

58. Să se scrie un multiplu oarecare al numărului a și un alt multiplu oarecare al lui a. Să se demonstreze că suma lor este tot un multiplu al lui a.

---

53. *e)* $(a+b)(x+y)$; *f)* $(a-x)(m+n)$; *g)* $(a+b+1)(x+3)$.

54. *a)* $(a+b)(x+y)$; *b)* $(m+n)(a-b)$; *c)* $(x+y)(2a+b)$; *d)* $(3x+4a)(x+2y)$.

59. Să se demonstreze că: *a)* un număr de 4 cifre în care primele două cifre sînt egale între ele și ultimele două cifre sînt egale între ele este divizibil cu 11; *b)* un număr de 6 cifre în care primele 3 cifre sînt egale între ele și ultimele 3 cifre sînt egale între ele este divizibil cu 111. Să se extindă asupra cazului unui număr format din 8 cifre, 10 cifre ş.a.m.d.

60. Să se demonstreze că: *a)* dacă la dreapta unei cifre scriem aceeași cifră, obţinem un număr divizibil cu 11; *b)* dacă la dreapta unui număr de două cifre scriem aceleași două cifre, în aceeași ordine (de exemplu, din 23 formăm numărul 2323) obţinem un număr divizibil cu 101 şi să se afle cîtul; *c)* dacă facem operaţia analogă cu un număr de 3 cifre, obţinem un număr divizibil cu 1 001. Să se dea exemple.

61. Să se demonstreze că, dacă dintr-un număr natural oarecare se scade suma cifrelor, se obţine un număr divizibil cu 9 și să se afle cîtul. (Se va lua, de exemplu, cazul cînd numărul este format din 3 cifre.)

62. Să se demonstreze că, dacă într-un număr de trei cifre, cifra zecilor este zero, suma ce se obţine adunînd numărul cu răsturnatul său este divizibilă cu 101 şi să se afle cîtul.

Răsturnatul unui număr se obţine scriind cifrele sale în ordine inversă. Exemple: răsturnatul lui 823 este 328; răsturnatul lui 6 358 este 8 536.

---

59. *a)* $1\,000a + 100a + 10b + b = 1\,100a + 11b = 11\,(100a + b)$. **61.** Cîtul este $11a + b$, unde a este cifra sutelor, iar b este cifra zecilor. **62.** Cîtul este $a + b$, a şi b fiind cifrele diferite de zero ale numărului.

63. Să se demonstreze că diferența dintre un număr de 3 cifre și răsturnatul său este divizibilă cu 99.

PROBLEME DIVERSE

64. Să se demonstreze că: *a)* suma a două numere pare este un număr par; *b)* suma a două numere impare este un număr par; *c)* suma a două numere dintre care unul este par și celălalt impar este un număr impar.

65. Să se demonstreze că suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3. Să se dea exemple. Numerele se vor nota cu $x - 1$, x, $x + 1$.

66. *a)* Să se demonstreze că dacă la pătratul unui număr natural adăugăm acel număr, obținem produsul dintre numărul dat și numărul următor. Să se dea exemple. *b)* Să se studieze cazul cînd din pătratul unui număr oarecare scădem acel număr.

67. Să se demonstreze că diferența pătratelor a două numere naturale consecutive este egală cu suma celor două numere. Să se dea exemple.

68. Să se demonstreze că diferența pătratelor a două numere fără soț consecutive este de 4 ori numărul cuprins între ele. Să se dea exemple.

Numerele se vor nota cu $2a - 1$, $2a + 1$.

69. Să se demonstreze că produsul a două numere fără soț consecutive mărit cu 1 este un pătrat perfect.

70. Se consideră trei numere naturale consecutive. Înmulțim primul cu al doilea și al doilea cu al treilea. Să se demonstreze că: *a)* suma acestor produse este dublul pătratului numărului mijlociu; *b)* diferența acestor produse este dublul numărului mijlociu.

71. Se consideră două numere de două cifre, în care cifra zecilor este 1, de exemplu 12 și 15, sau 13 și 18. Asemenea numere sînt de forma $10 + a$ și $10 + b$. Să se arate că produsul lor poate fi pus sub forma:

$$10\,[(10 + a) + b] + ab.$$

---

63. Cîtul $a - c$, a și c fiind prima și ultima cifră a numărului.

Să se deducă de aici că înmulţirea se poate face ca în exemplele următoare:

$$13 \cdot 18 = ? \text{ Zicem: } 13 + 8 = 21 \ldots 210,$$
$$3 \cdot 8 = 24,\ 210 + 24 = 234;$$
$$15 \cdot 19 = ? \text{ Zicem: } 15 + 9 = 24 \ldots 240,$$
$$5 \cdot 9 = 45,\ 240 + 45 = 285.$$

72. Se consideră două numere de două cifre, ca 32 şi 38 sau 23 şi 27, în care cifra zecilor este aceeaşi, iar suma cifrelor unităţilor este 10. Asemenea numere se pot scrie sub forma: $10a + b$ şi $10a + c$, cu condiţia: $b + c = 10$. Să se arate că produsul lor poate fi pus sub forma:

$$100a\,(a + 1) + bc.$$

Să se examineze şi cazul cînd se obţin produse de o singură cifră (de ex.: $29 \cdot 21$).

Să se deducă de aici că înmulţirea a două asemenea numere se poate face prescurtat, ca în exemplele următoare:

$$32 \cdot 38 = ? \text{ Zicem: } 3 \cdot 4 = 12,\ 2 \cdot 8 = 16.$$

Rezultatul este 1 216;

$$53 \cdot 57 = ? \text{ Zicem: } 5 \cdot 6 = 30,\ 3 \cdot 7 = 21.$$

Rezultatul este: 3 021.

73. Un număr terminat cu 5 este de forma $10a + 5$. Să se arate că pătratul unui asemenea număr se poate scrie sub forma: $100a(a + 1) + 25$. Să se deducă de aici că: pentru a ridica la pătrat un număr în care ultima cifră este 5, se poate proceda ca în exemplele următoare:

$75^2 = ?$ Zicem: $7 \cdot 8 = 56$, scriem: 56, iar la dreapta lui, 25. Rezultatul este: 5 625.

$35^2 = ?$ Zicem: $3 \cdot 4 = 12$, scriem 12, iar la dreapta lui, 25. Rezultatul este 1 225.

Să se calculeze după acest procedeu pătratele numerelor 15, 25, 35,...,95.

74. Să se arate că $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$ poate fi pus sub forma: $a\,(a + 1) + \frac{1}{4}$. Să se deducă de aici că un număr mixt în

Înmulțirea

25. Să se efectueze, scriind rezultatul sub formă de putere, următoarele înmulțiri:

a) $3^2 \cdot 3$; *b)* $2^5 \cdot 2^3$; *c)* $a^3 \cdot a^2$; *d)* $x \cdot x^3$; *e)* $y^4 \cdot y$; *f)* $m^4 \cdot m^2 \cdot m$; *g)* $x^2 \cdot x \cdot x^4$.

26. Să se efectueze:

a) $2x \cdot 3$; *b)* $3a^2(-4)$; *c)* $(-2a)(-3)$;
d) $(-2x) \cdot 3y$; *e)* $(-4) \cdot (+2xy)$; *f)* $2x^2 \cdot 4x$;
g) $3a^4 \cdot 2a$; *h)* $(-2a^2b) \cdot (2{,}5a)$; *i)* $3x^2y \cdot (-2y^2)$;
j) $2a \cdot 3b \cdot 5c$; *k)* $(-4x^2)(-2x) \cdot 5x$ · *l)* $2a \cdot 5a^2 \cdot 4a^3$.

27. Să se facă figuri, după modelul figurilor 12 și 13 prin care să se arate că:

a) $(a+b+c)x = ax+bx+cx$;
b) $(a+b+c)(x+y) = ax+bx+cx+ay+by+cy$;
c) $(a+b+c)(x+y+z) = ax+bx+cx+ay+by+ cy+az+bz+cz$.

28. Să se efectueze înmulțirile:

a) $(5x+3y) \cdot 2$; *b)* $(2a-5b) \cdot 4$;
c) $(x-2a+3b)(-2)$; *d)* $(a+b-c)(-2a)$;
e) $(2x^2-3x+2)(-4x)$; *f)* $(5a^2-3a+4)(-4a)$.

29. Să se efectueze operațiile următoare și să se facă proba prin substituție (v. § 43), dînd literelor valorile indicate:

a) $2(3x-1)-4(x+2)+2(3x+5)$; $x=+2$;
b) $3(5a+2b)+2(3a-4b)-5(2a-b)$; $a=3$, $b=-2$;
c) $x^4-2x^2-3x(x^3-2)-4x^2(x^2-x-2)$; $x=-2$.

---

29. *a)* $8x$; *b)* $11a+3b$; *c)* $-6x^4+4x^3+6x^2+6x$.

care partea fracţionară este $\frac{1}{2}$ se poate ridica la pătrat, ca în exemplele următoare:

$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = ?$ Zicem: $7 \cdot 8 = 56$. Rezultatul: $56\frac{1}{4}$

$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = ?$ Zicem: $3 \cdot 4 = 12$. Rezultatul: $12\frac{1}{4}$.

75. Să se demonstreze că suma pătratelor a două numere naturale consecutive, x şi $x + 1$, poate fi pusă sub forma $2x(x + 1) + 1$ şi să se deducă un mijloc de a o calcula mai uşor. Exemplu: $15^2 + 16^2 = ?$; $15 \cdot 16 = 240$; $240 \cdot 2 = 480$; $480 + 1 = 481$. Rezultatul: 481.

76. Avem un pătrat cu latura a. Mărim una din laturile lui cu o cantitate oarecare x şi micşorăm cealaltă latură tot cu x. Să se compare perimetrul şi aria pătratului iniţial cu perimetrul şi aria dreptunghiului obţinut. Să se deducă de aici că: dintre toate dreptunghiurile care au acelaşi perimetru, pătratul are aria cea mai mare.

77. Jocuri. *a)* Alege-ţi un număr oarecare, adaugă-i 1, înmulţeşte suma cu 2, adaugă 3, înmulţeşte suma obţinută cu 4, scade din acest produs de 8 ori numărul pe care ţi l-ai ales. Ţi-a ieşit 20!

Explicaţie. S-au făcut cu un număr necunoscut x operaţiile indicate de expresia:

$$4[2(x + 1) + 3] - 8x.$$

Efectuînd calculele, se obţine rezultatul 20, *oricare* ar fi x. Se ştie dinainte că rezultatul va fi 20.

b) Alege-ţi un număr oarecare, fă operaţiile ca mai sus, dar la urmă, în loc să scazi de 8 ori numărul de la început, scade 20 şi spune-mi cît ţi-a ieşit! Împart rezultatul prin 8 şi aflu numărul pe care l-ai ales.

Explicaţie. Se foloseşte identitatea:

$$4[2(x + 1) + 3] - 20 = 8x.$$

După acest model se pot compune alte jocuri. Sau „ghicim" rezultatul sau cerem rezultatul şi „ghicim" numărul ales.

c) Scrie data zilei tale de naştere, înmulţeşte acest număr cu 5, adaugă numărul lunii în care te-ai născut, înmulţeşte rezultatul cu 2 şi scade numărul lunii în care te-ai născut. Spune-mi cît ţi-a ieşit!

Ultima cifră reprezintă luna în care te-ai născut, iar prima cifră (sau primele două cifre) reprezintă data zilei. De exemplu, dacă rezultatul este 83, data naşterii este 8 martie; dacă rezultatul este 257, data naşterii este 25 iulie.

Explicaţie. $2(5a + b) - b = 10a + b$.

Rezultatul este valabil numai dacă b este un număr de o singură cifră, adică persoana cu care joci este născută într-una din primele nouă luni ale anului. Dacă persoana este născută în octombrie, noiembrie sau decembrie, se procedează astfel: prima cifră (sau primele două cifre), micşorată cu 1, dă data zilei, iar ultima cifră, mărită cu 10, indică luna. De exemplu, dacă rezultatul este 191, data naşterii este 18 noiembrie; ea poate fi însă şi 19 ianuarie, deoarece $191 = 19 \cdot 10 + 1$ şi $191 = 18 \cdot 10 + 11$.

În asemenea cazuri (cînd ultima cifră a rezultatului este 1 sau 2), trebuie pusă şi întrebarea suplimentară dacă persoana cu care joci e născută în prima sau în a doua jumătate a anului.

Capitolul IV

FRACȚII ALGEBRICE

59. Ce este o fracție algebrică. Expresii ca:

$$\frac{a}{x}, \frac{2x+3}{x-1}, \frac{a^2+x^2}{a-x}$$

se numesc fracții algebrice. Expresia scrisă deasupra liniei de fracție se numește *numărătorul* fracției, iar expresia scrisă sub linia de fracție se numește *numitorul* fracției.

O fracție algebrică reprezintă cîtul dintre numărătorul și numitorul ei.

De exemplu $\frac{a}{x}$ este o expresie care înmulțită cu x dă a; $\frac{2x+3}{x-1}$ este o expresie care înmulțită cu $(x-1)$ dă $2x+3$.

Această definiție corespunde celei din aritmetică. De exemplu $\frac{3}{8}$ este cîtul dintre 3 și 8.

$$3:8=\frac{3}{8}, \text{ căci } \frac{3}{8}\cdot 8=3.$$

60. Valori pentru care o fracție nu are sens. O fracție își pierde sensul cînd numitorul ei ia valoarea zero. Astfel, fracția $\frac{a}{x}$ își pierde sensul

cînd $x = 0$; fracţia $\frac{2x+3}{x-1}$ îşi pierde sensul cînd $x = 1$.

61. Amplificarea şi simplificarea fracţiilor. O fracţie algebrică, ca orice expresie algebrică, reprezintă un număr. Fie, de exemplu, fracţia:

$$\frac{2x+1}{x-2},$$

pentru $x = +5$, ea reprezintă numărul $\frac{11}{3}$; pentru $x = -4$, ea reprezintă numărul $\frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}$.

De aceea, fracţiile algebrice au aceleaşi proprietăţi ca şi fracţiile ordinare.

Cînd înmulţim ambii termeni ai unei fracţii algebrice cu aceeaşi expresie, sau cînd îi împărţim prin aceeaşi expresie, obţinem o fracţie egală cu fracţia dată.

Transformarea este permisă numai cîtă vreme expresia cu care înmulţim sau prin care împărţim este *diferită de zero*.

E x e m p l e. *a)* $\frac{3a^2b}{6ab^2} = \frac{a}{2b}$.

Am simplificat coeficienţii cu 3, apoi am împărţit ambii termeni prin a, apoi prin b. Se poate spune că am simplificat fracţia cu $3ab$.

$$b)\ \frac{6x+12}{4x+8} = \frac{6(x+2)}{4(x+2)} = \frac{3}{2}.$$

Am scos la numărător factorul comun 6, iar la numitor factorul comun 4, apoi am simplificat cu 2 şi cu $x + 2$.

62. **Observări.** 1) Simplificarea fracțiilor se poate face numai cînd termenii fracției sînt produse.

Cînd sînt sume, sau diferențe, este necesar să descompunem în factori dacă se poate și să simplificăm apoi prin factorul comun.

2) Fracția simplificată este identică cu cea de la început numai cîtă vreme expresia cu care se simplifică este diferită de zero.

Exemplu. $\frac{x^2 - x}{2x - 2} = \frac{x(x-1)}{2(x-1)} = \frac{x}{2}$.

Fracția dată are sens numai cînd $x \neq 1$ (pentru $x = 1$, numitorul ei se anulează), iar fracția de la rezultat are sens pentru orice valoare a lui x. Această nepotrivire se datorește faptului că am simplificat cu $x - 1$, care ia valoarea zero pentru $x = 1$.

63. **Adunarea și scăderea fracțiilor.** 1) Cînd fracțiile au același numitor, se face suma algebrică a numărătorilor și se lasă numitorul neschimbat.

Exemplu.

$$\frac{a+1}{4} + \frac{a}{4} - \frac{3}{4} = \frac{a+1+a-3}{4} =$$

$$= \frac{2a-2}{4} = \frac{2(a-1)}{4} = \frac{a-1}{2}.$$

Am redus termenii asemenea de la numărător, am scos factorul comun 2 și am simplificat cu 2.

2) Cînd numărătorul fracției are mai mulți termeni, linia de fracție ține loc de paranteză. Cînd scriem toți termenii cu un singur numitor (cu o linie de fracție lungă), procedăm ca la desfacerea parantezelor; cînd în fața fracției se găsește semnul +, luăm toți termenii cu semnele lor,

iar cînd în faţa fracţiei se găseşte semnul —, schimbăm semnele tuturor termenilor de la numărător:

$$\frac{x+1}{8}+\frac{-x+2}{8}-\frac{2x-4}{8}=\frac{x+1-x+2-2x+4}{8}=$$

$$=\frac{-2x+7}{8}=-\frac{2x-7}{8}.$$

De obicei, se evită ca primul termen al numărătorului să aibă semnul —, ca să nu se confunde cu semnul — din faţa fracţiei. De aceea am pus — în faţa fracţiei şi am schimbat semnele tuturor termenilor de la numărător.

3) $\frac{a-b}{4}+\frac{2a-b}{6}-\frac{a-2b}{3}.$

Numitorul comun este 12. Amplificăm prima fracţie cu 3, a doua cu 2 şi a treia cu 4. Obţinem:

$$\frac{3a-3b+4a-2b-4a+8b}{12}=\frac{3a+3b}{12}=$$

$$=\frac{3(a+b)}{12}=\frac{a+b}{4}.$$

4) $\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}.$

Numitorul comun este ab. Amplificăm prima fracţie cu a şi a doua cu b. Obţinem:

$$\frac{a^2+ab-ab+b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

5) O expresie întreagă (care nu este fracţionară) este considerată ca o fracţie cu numitorul 1:

$$2a-\frac{3a-b}{2}=\frac{4a-3a+b}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

64. Inmulţirea şi împărţirea fracţiilor. Şi aceste operaţii se fac după regulile învăţate la aritmetică.

1) *Pentru a înmulţi două fracţii algebrice, înmulţim numărătorii între ei şi numitorii între ei.*

E x e m p l e.

$$a)\ \frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}=\frac{x^2}{6};\ b)\ \frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{c}=\frac{a^2-b^2}{2c}.$$

Cînd se poate, facem simplificări înainte de a efectua înmulţirea:

$$\frac{2a^3}{x}\cdot\frac{b}{6a^2}\cdot\frac{3x^2}{y}=\frac{abx}{y}.$$

Se suprimă coeficientul 2 de la primul numărător, iar coeficientul 6 de la numitorul al doilea se înlocuieşte cu 3; apoi se suprimă acest număr şi coeficientul 3 de la numărătorul al treilea; apoi se suprimă a^2 de la numitorul al doilea şi exponentul 3 de la a^3; în sfîrşit, se suprimă x de la primul numitor şi exponentul 2 de la x^2.

2) *Pentru a împărţi o fracţie printr-o altă fracţie, se înmulţeşte prima fracţie cu inversa fracţiei a doua.*

E x e m p l e.

$$a)\ a:\frac{2}{x}=\frac{a}{1}\cdot\frac{x}{2}=\frac{ax}{2};$$

$$b)\ \frac{2a-2b}{ax}:\frac{3a-3b}{4ay}=\frac{2(a-b)}{ax}\cdot\frac{4ay}{3(a-b)}=\frac{8y}{3x}.$$

65. **Expresii algebrice fracționare.** Numărătorul și numitorul unei fracții algebrice pot fi, la rîndul lor, fracții. Pentru a pune o expresie de acest fel („fracție etajată“) sub forma cea mai simplă, se efectuează separat calculele de la numărător și de la numitor și se împarte numărătorul prin numitor.

Exemplu.

$$\frac{a+\dfrac{a}{a-1}}{a-\dfrac{a}{a+1}}=\frac{\dfrac{a^2-a+a}{a-1}}{\dfrac{a^2+a-a}{a+1}}=\frac{\dfrac{a^2}{a-1}}{\dfrac{a^2}{a+1}}=\frac{a^2}{a-1}\cdot\frac{a+1}{a^2}=\frac{a+1}{a-1}.$$

66. **Observare despre fracțiile algebrice.** În cele ce precedă am preluat din aritmetică proprietățile fracțiilor și regulile operațiilor cu fracții. Dar în aritmetică proprietățile fracțiilor și regulile operațiilor cu fracții se stabilesc numai pentru cazul cînd ambii termeni sînt numere naturale, de exemplu $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{11}$. În algebră, însă, literele reprezintă numere raționale *oarecare*, întregi sau fracționare, pozitive sau negative. De asemenea și valorile numerice ale diferitelor expresii pot fi numere raționale oarecare.

Într-un studiu mai adîncit, trebuie demonstrat că tot ce s-a stabilit în aritmetică despre fracții rămîne valabil și pentru fracțiile algebrice.

EXERCIȚII

Valoarea numerică a unei fracții

1. Să se calculeze valorile numerice ale fracțiilor următoare:

a) $\frac{x-2}{x+3}$ pentru $x=-\frac{2}{3}$ și $x=3\frac{1}{2}$;

b) $\frac{a+b}{a-b}$ pentru $a=5$, $b=-\frac{3}{4}$;

c) $\frac{2x - 3y}{3x - 2y}$ pentru $x = -4$, $y = -\frac{5}{6}$;

d) $\frac{2x^2 - x}{1 - x^2}$ pentru $x = -3$ și $x = +10$.

2. O fracție anumită $\frac{x}{y}$ are aceeași valoare, oricare ar fi valoarea pe care o dăm lui y. Ce valoare are x?

3. Pentru ce valori ale literelor, expresiile următoare își pierd sensul?

a) $\frac{x}{x-2}$; b) $\frac{a}{a-b}$; c) $\frac{y^2+1}{2y-1}$; d) $\frac{x+y}{x-2y}$.

4. Un metru de pînză costă x lei și se ieftinește cu 2 lei. Cîți metri de pînză putem cumpăra cu 100 lei? Pentru ce valoare a lui x fracția obținută își pierde sensul? Care este semnificația concretă a acestui fapt?

5. Viteza maximă a unui tren este de v km/oră. În medie, viteza trenului este cu 5 km/oră mai mică. În cît timp parcurge trenul un drum de s km cu viteza medie? Pentru ce valori ale lui v fracția obținută își pierde sensul? Explicație.

6. Să se arate care dintre fracțiile următoare reprezintă o fracție supraunitară și care o fracție subunitară. Literele reprezintă numere naturale.

a) $\frac{m}{m+1}$; b) $\frac{a-1}{a+1}$; c) $\frac{x+2}{x+1}$; d) $\frac{2x+1}{x+1}$.

---

1. a) $-1\frac{1}{7}$; $\frac{3}{13}$; b) $\frac{17}{23}$; c) $\frac{33}{62}$; d) $-2\frac{5}{8}$; $-1\frac{91}{99}$.
3. a) $x = 2$; b) $a = b$; c) $y = 0{,}5$; d) $x = 2y$.
4. $x = 2$. 5. $v = 5$.

7. Să se pună între fracțiile următoare semnul < sau >, după cum este cazul (x reprezintă un număr pozitiv).

a) $\frac{x+1}{3}$ și $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3+x}$ și $\frac{2}{3}$;

c) $\frac{18+x}{25}$ și $\frac{x}{25}$; d) $\frac{3}{x+7}$ și $\frac{3}{7}$.

Simplificarea fracțiilor

8. Să se simplifice:

a) $\frac{2x}{2y}$; b) $\frac{5a}{5b}$; c) $\frac{12a}{18b}$; d) $\frac{21a^2}{35b^2}$; e) $\frac{7x}{8x}$;

f) $\frac{3x^2}{4x^2}$; g) $\frac{3(a+b)}{4(a+b)}$; h) $\frac{5(m-n)}{9(m-n)}$; i) $\frac{ax}{ay}$;

j) $\frac{3a^2}{5a^3}$; k) $\frac{m}{m^2}$; l) $\frac{a^3}{a^5}$; m) $\frac{4x^2}{10x^3}$; n) $\frac{8a^2m}{12am^2}$;

o) $\frac{12x^2(a-b)}{15x^3(a-b)}$; p) $\frac{3(x+y)}{5(x+y)^2}$

9. Să se simplifice fracțiile următoare, punînd mai întîi numărătorul și numitorul sub formă de produs:

a) $\frac{4a+8}{4a+12}$; b) $\frac{6x-15}{9x+12}$; c) $\frac{2m+6}{5m+15}$;

d) $\frac{8a-12x}{12a-18x}$; e) $\frac{ax+a}{bx+b}$; f) $\frac{bm-b}{cm-c}$;

g) $\frac{ax+bx}{ay+by}$; h) $\frac{am-2bm}{2an-4bn}$; i) $\frac{ax^2-2ax}{bxy-2by}$.

---

9. a) $\frac{a+2}{a+3}$; b) $\frac{2x-5}{3x+4}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{a}{b}$; f) $\frac{b}{c}$; g) $\frac{x}{y}$; h) $\frac{m}{2n}$; i) $\frac{ax}{by}$. **10.** a) $\frac{1}{x+2}$; b) $\frac{2}{a-3}$; c) $\frac{m-1}{3}$;

10. Să se simplifice:

a) $\frac{x-2}{x^2-4}$; *b)* $\frac{2a+6}{a^2-9}$; *c)* $\frac{m^2-1}{3m+3}$;

d) $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$; *e)* $\frac{x^2-4y^2}{(x+2y)^2}$; *f)* $\frac{3a^2-12b^2}{5a-10b}$.

11. Să se scrie sub formă de fracţie împărţirile următoare şi să se simplifice:

a) $6a^2x : 3ax^4$; *b)* $(3a+3b):(2a+2b)$;

c) $12a(x+y)^2 : [-8a^3(x+y)]$;

d) $(x^2-4p^2):(3x-6p)$.

12. Se dă fracţia $\frac{3m+3}{5m+5}$. Să se afle valoarea acestei fracţii pentru $m=1$, $m=2$, $m=3$ ş.a.m.d. Ce legătură există între valoarea lui m şi numărul cu care se simplifică fracţia obţinută? Să se simplifice fracţia dată şi să se explice cele constatate pe exemplele luate.

13. *a)* În fracţia $\frac{3x}{5x}$ înlocuim x printr-un număr oarecare. Se obţine o fracţie reductibilă sau ireductibilă?

---

d) $\frac{a+b}{a-b}$; *e)* $\frac{x-2y}{x+2y}$; *f)* $\frac{3(a+2b)}{5}$. **11.** *a)* $\frac{2a}{x^3}$; *b)* $\frac{3}{2}$;

c) $-\frac{3(x+y)}{2a^2}$; *d)* $\frac{x+2p}{3}$.

b) În fracţia $\frac{m-1}{m+1}$, înlocuim m printr-un număr fără soţ. Va fi fracţia obţinută reductibilă sau ireductibilă?

c) Aceeaşi întrebare dacă înlocuim, în fracţia $\frac{a-b}{a+b}$, a şi b prin numere cu soţ.

Adunarea şi scăderea fracţiilor

14. Să se efectueze:

a) $\frac{2a}{9}+\frac{5a}{9}$; *b)* $\frac{5x}{7}-\frac{2x}{7}$; *c)* $\frac{3x}{4}+\frac{x}{4}$;

d) $\frac{5x}{8}-\frac{x}{8}$; *e)* $\frac{2x}{9}-\frac{5x}{9}$; *f)* $\frac{3x}{8}-\frac{7x}{8}$.

15. *a)* $\frac{a}{3}+\frac{x}{3}$; *b)* $\frac{m}{12}-\frac{n}{12}$; *c)* $\frac{2a}{7}-\frac{3b}{7}$;

d) $\frac{3}{ax}+\frac{2}{ax}$; *e)* $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}$; *f)* $\frac{3}{x+y}+\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x+y}$

16. *a)* $\frac{x+1}{4}+\frac{2x-1}{4}-\frac{x+2}{4}$;

b) $\frac{2a-b}{3}-\frac{a+2b}{3}-\frac{a-3b}{3}$;

c) $\frac{2x-3a+1}{2}+\frac{x+2a-3}{2}-\frac{a-x}{2}$;

d) $\frac{3(a-1)}{5}-\frac{2(a-3)}{5}+\frac{4(a+1)}{5}-\frac{a-4}{5}$.

---

16. *a)* $\frac{x-1}{2}$; *b)* 0; *c)* $2x-a-1$; *d)* $\frac{4a+11}{5}$.

17. a) $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{x+1}-\frac{2}{x+1}$;

b) $\frac{x+2y-1}{2x-y}-\frac{x-2y+1}{2x-y}+$

$+\frac{3x-4y+2}{2x-y}-\frac{x+2}{2x-y}$;

c) $\frac{2m-3n+1}{m-n}+\frac{3m+n-2}{m-n}-$

$-\frac{2m-3n+4}{m-n}-\frac{2m+2n-5}{m-n}$;

d) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$; e) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}$.

18. a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$; b) $\frac{a}{4}-\frac{a}{6}$; c) $\frac{3m}{4}-\frac{m}{2}$;

d) $\frac{5a}{6}-\frac{3b}{4}+\frac{b}{2}-\frac{2a}{3}$;

e) $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}+\frac{4x}{15}-\frac{5x}{6}$.

19. a) $\frac{x}{8}-\frac{1}{2}$; b) $\frac{m}{10}-\frac{1}{4}+\frac{m}{5}-\frac{1}{2}$;

c) $\frac{25x}{18}-\frac{4}{9}+\frac{2x}{3}-\frac{1}{4}$;

d) $\frac{4a}{25}-\frac{3b}{10}+\frac{4a}{5}+\frac{b}{2}$.

---

17. b) $\frac{2(x-1)}{2x-y}$; c) 1; d) 1; e) 1.

18. a) $\frac{5x}{6}$; b) $\frac{a}{12}$; c) $\frac{m}{4}$; d) $\frac{2a-3b}{12}$; e) $-\frac{3x}{5}$.

19. a) $\frac{x-4}{8}$; b) $\frac{3(2m-5)}{20}$; c) $\frac{74x-25}{36}$; d) $\frac{24a+5b}{25}$.

20. a) $\frac{2x-1}{4}-\frac{5x-2}{6}$; b) $\frac{m+3}{4}-\frac{2m-3}{2}$;

c) $\frac{a-2}{8}-\frac{a+1}{4}+\frac{2a-3}{12}$; d) $1+\frac{a-1}{2}$;

e) $x-\frac{x+1}{2}$; f) $3a+\frac{a-3}{2}$; g) $a+\frac{b}{2}$;

h) $2a-\frac{b}{3}$; i) $\frac{x}{3}-2y$; j) $\frac{a}{2}-3b$.

21. a) $\frac{x-2}{7}-\frac{2x-1}{2}+\frac{x+2}{14}-\frac{3x-1}{28}$;

b) $\frac{x-2y+1}{4}-\frac{2x-y+3}{6}+1$;

c) $\frac{x-2a+b}{15}-\frac{2x+4a-5b}{20}+$

$+\frac{2x+a+b}{10}-\frac{x-7a}{30}$.

d) $\frac{2a-3b+c}{8}-\frac{3a-b-c}{12}+$

$+\frac{a-b}{6}-\frac{2b-c}{4}-\frac{a-b-c}{2}$.

---

20. a) $\frac{1-4x}{12}$; b) $\frac{3(3-m)}{4}$; c) $\frac{a-18}{24}$; d) $\frac{a+1}{2}$;

e) $\frac{x-1}{2}$; f) $\frac{7a-3}{2}$.

21. a) $\frac{11-25x}{28}$; b) $-\frac{x+4y-9}{12}$; c) $\frac{8x+25b}{60}$;

d) $-\frac{8a+11b-23c}{24.}$.

22. a) $\frac{x-1}{2}+1$; b) $a-\frac{2a-1}{3}$; c) $x+\frac{x-1}{2}$;

d) $\frac{a-b}{2}+b$; e) $2x-\frac{x-1}{3}$; f) $\frac{2x+1}{2}-x$.

23. a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{a}-\frac{2}{3}$; c) $\frac{3}{x}-\frac{2}{y}$;

d) $1-\frac{2}{6}$; e) $\frac{2x+1}{y}-\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{2x}-1$.

24. a) $\frac{2}{3a}-\frac{5}{26}$; b) $\frac{7}{4x}-\frac{2}{3y}+\frac{5}{2y}-\frac{1}{x}$;

c) $\frac{5}{2x}-\frac{3}{4y}+\frac{1}{2xy}$; d) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{4}$.

25. a) $\frac{3}{4a}+\frac{1}{2a}-\frac{5}{6a}$; b) $\frac{3}{8x}-\frac{5}{4x}+\frac{1}{6x}-\frac{7}{12x}$;

c) $\frac{5}{12y}-\frac{4}{15y}+\frac{3}{10y}+\frac{4}{5y}-\frac{7}{30y}$.

26. a) $\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{4x}$; b) $\frac{3}{m^2}-\frac{1}{2m}$;

c) $\frac{4}{m^2}-\frac{3}{mn}+\frac{1}{n^2}$; d) $a+\frac{c-ab}{b}$.

27. a) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1$; b) $\frac{2x^2-x+2}{x^2y}-\frac{2x-1}{xy}$;

c) $\frac{3a}{bc}-\frac{2b}{ac}+\frac{4c}{ab}$; d) $\frac{3a}{2ax^2}-\frac{x}{6a^2x}+\frac{2}{3a^2x^2}$.

---

25. a) $\frac{5}{12a}$; b) $-\frac{31}{24x}$; c) $\frac{61}{60y}$.

26. c) $\frac{4n^2-3mn+m^2}{m^2n^2}$; d) $\frac{c}{b}$.

27. c) $\frac{3a^2-2b^2+4c^2}{abc}$; d) $\frac{9a^2-x^2+4}{6a^2x^2}$.

28. a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}$;

c) $\frac{1}{a+b} + \frac{a-b}{(a+b)^2}$; d) $\frac{2a+5}{a+2} - \frac{6a+2}{3(a+2)}$.

29. a) $\frac{2x-1}{x+1} - \frac{3x}{2x+2} + \frac{x}{4}$;

b) $\frac{3a-2}{2a+6} + \frac{2a+5}{3a+9} - \frac{a-4}{6a+18}$;

c) $\frac{m-2n}{4m+4n} + \frac{3m+n}{2m+2n} - \frac{5m-n}{3m+3n}$.

30. a) $\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-2}{x+1} + \frac{x}{x^2-1}$;

b) $\frac{5}{6a+6b} - \frac{3}{2a+2b} + \frac{2}{3a-3b}$;

c) $\frac{1}{a^2-4} + \frac{a}{2a-4} - \frac{2a}{a+2}$.

31. Se dă expresia:

$$\frac{2x-a}{2} - \frac{x-2a}{4}$$

Să se dea lui x o valoare oarecare, de exemplu: $x = 20$, iar lui a valorile: 1,2,3 ș.a.m.d. și să se calculeze valorile corespunzătoare ale expresiei. Ce se observă? Explicație.

---

28. a) $\frac{1-x}{2(x+1)}$; b) $\frac{2a}{a^2-1}$; c) $\frac{2a}{(a+b)^2}$ d) $\frac{13}{3(a+2)}$

29. a) $\frac{x^2+3x-4}{4(x+1)}$; b) $\frac{2(3a+2)}{3(a+3)}$; c) $\frac{m+4n}{12(m+n)}$.

30. a) $\frac{7x}{x^2-1}$; b) $\frac{4b}{3(a^2-b^2)}$; c) $-\frac{3a^2-10a-2}{2(a^2-4)}$.

32. Se dă expresia:

$$\frac{a+b+1}{4}-\frac{a-b+1}{6}-\frac{a+5b}{12}.$$

Să se calculeze valorile ei numerice pentru diferite valori ale literelor a şi b. Ce se observă? Explicaţie.

33. Să se calculeze: $1-\frac{3}{4}$, $1-\frac{4}{5}$, $1-\frac{5}{6}$ ş.a.m.d. Să se efectueze apoi scăderea $1-\frac{x}{x+1}$ şi să se interpreteze rezultatul în legătură cu exemplele precedente.

34. Un biciclist face a km în 3 ore, iar un alt biciclist face b km în 4 ore. Cu cît este mai mare viteza primului biciclist decît viteza celui de-al doilea? Aplicaţie numerică *: $a = 45$, $b = 48$.

35. Pentru 15 lei se cumpără a caiete, iar pentru 12 lei se cumpără b maculatoare. Cu cît este mai scump un caiet decît un maculator? Aplicaţie numerică: $a = 30$, $b = 40$.

36. De pe un lan de x ha s-au cules a kg de grîu, iar de pe un lan de y ha s-au cules b kg de grîu. Cu cît este mai mare producţia la hectar pe primul lan decît pe al doilea?

37. Un robinet poate umple un bazin în a ore, iar alt robinet — în b ore. Ce fracţie din bazin se umple într-o oră, dacă deschidem ambele robinete? Întrebare analogă în cazul cînd sînt trei robinete. Aplicaţie numerică: $a = 4$, $b = 6$; $a = 8$, $b = 10$.

38. Un bazin are două robinete. Primul robinet poate să umple bazinul în a ore, iar al doilea

* Rezultatul se va afla direct şi apoi pe baza formulei obţinute.

---

34. $\frac{4a-3b}{12}$. **37.** $\frac{a+b}{ab}$. **38.** $\frac{b-a}{ab}$.

îl poate goli în b ore. Ce fracţie din bazin se umple într-o oră, dacă deschidem amîndouă robinetele? (Debitele robinetelor se presupun constante.) Aplicaţie numerică: $a = 6$, $b = 10$.

39. Se consideră trei numere oarecare, de exemplu 5, 9 şi 17. Mediile aritmetice ale numerelor luate cîte două sînt: 7, 11, 13. Se constată că suma mediilor este aceeaşi cu suma numerelor. Să se verifice acest lucru pe alte exemple şi să se demonstreze că e adevărat oricare ar fi numerele a, b, c.

40. Să se demonstreze că, dacă adunăm semisuma a două numere cu semidiferenţa lor, obţinem primul număr; dacă scădem semidiferenţa din semisumă, obţinem numărul al doilea. Să se dea exemple.

Înmulţirea şi împărţirea fracţiilor

41. Să se efectueze:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{a}{4}$; *b)* $\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3}$; *c)* $\frac{2a}{3} \cdot \frac{4}{5y}$;

d) $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{y}{a^2}$; *e)* $\frac{x}{4} \cdot \frac{6}{y}$; *f)* $\frac{3}{a} \cdot \frac{x}{6}$;

g) $\frac{a}{3} \cdot \frac{5}{a}$; *h)* $\frac{a^2}{m} \cdot \frac{b}{a}$; *i)* $3 \cdot \frac{m}{6}$;

j) $\frac{5}{a} \cdot a^2$; *k)* $\frac{4x^2y}{15a^2b} \cdot 5ab$; *l)* $8xy \cdot \frac{m}{4x^2y^3}$;

m) $\frac{8x^2y}{9ab^2} \cdot \frac{3a^2b}{4xy^2}$; *n)* $\frac{12a^2}{7b^2c} \cdot \frac{21bc^3}{8a^3}$.

42. Să se efectueze:

a) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}$; b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}$; c) $\frac{a}{2x} \cdot \frac{2}{5a} \cdot \frac{x^2}{6}$;

d) $\frac{ax}{5y} \cdot \frac{10m^2}{p} \cdot \frac{p^2}{m}$; e) $a^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{c}{5a}$;

f) $\frac{6a}{5x^2} \cdot 3b^2 \cdot \frac{5x}{12b^2}$; g) $\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{3}{4} \cdot b^2 \cdot \frac{b}{a^3}$.

43. Să se efectueze:

a) $2(x+y) \cdot \frac{a}{x+y}$; b) $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x-y}{2}$;

c) $\frac{a+c}{a-c} \cdot \frac{a-c}{4}$; d) $\frac{2a+2b}{a+c} \cdot \frac{3}{4(a+b)}$;

e) $\frac{5x+5a}{6} \cdot \frac{2}{3x+3a}$; f) $\frac{(a+c)^2}{6} \cdot \frac{6}{2(a+c)}$;

g) $\frac{m}{x-a} \cdot \frac{x^2-a^2}{m}$; h) $\frac{x+2m}{x-2m} \cdot \frac{x^2-4m^2}{8}$.

44. Să se efectueze:

a) $\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{6}\right) \cdot \frac{3}{2}$; b) $\left(\frac{3}{x} - \frac{5}{y}\right) \cdot 2xy$;

c) $\left(\frac{3a}{b} - \frac{2}{a}\right) \cdot \frac{ab}{6}$; d) $\left(\frac{5x}{2a} - \frac{4x}{3a} + \frac{x}{a}\right) \cdot 6a^2$.

---

43. a) $2a$; b) $\frac{x+y}{2}$; c) $\frac{a+c}{4}$; d) $\frac{3}{2(a+c)}$;

e) $\frac{5}{9}$; f) $\frac{a+c}{2}$; g) $x+a$; h) $\frac{(x+2m)^2}{8}$.

44. a) $\frac{2a+b}{4}$; b) $2(3y-5x)$; c) $\frac{3a^2-2b}{6}$; d) $13ax$.

45. Să se facă împărțirile:

a) $\frac{4a}{3} : \frac{5}{c}$; b) $\frac{a}{2} : 3$; c) $\frac{4x}{y} : 2$; d) $a : \frac{a}{3}$;

e) $3x : \frac{x}{6}$; f) $\frac{a}{b} : \frac{2a}{b}$; g) $\frac{2x+2a}{3} : \frac{6(x+a)}{y}$;

h) $\frac{x^2-y^2}{3y} : \frac{x+y}{6y}$.

46. Să se efectueze:

a) $\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{3}\right) : (-ax)$; b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) : 2xy$;

c) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \frac{1}{ab}$; d) $\left(\frac{2a}{3b} - \frac{4a}{b} + \frac{8a}{5b}\right) : \frac{14}{b}$.

47. a) $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$; b) $\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}$.

48. a) $\dfrac{1 + \frac{x-1}{2}}{\frac{x+1}{2} - 1}$; b) $\dfrac{\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}}{\frac{a}{6} + \frac{b}{2}}$.

---

45. g) $\frac{y}{9}$; h) $2(x-y)$. **46.** a) $\frac{2x-3a}{6ax}$; b) $\frac{6-4x+3y}{24xy}$;

c) $a^2 - b^2$; d) $-\frac{13a}{30}$.

47. a) $\frac{y-x}{y+x}$; b) $a+b$. **48.** a) $\frac{x+1}{x-1}$; b) $\frac{3}{2}$.

Capitolul V

ECUAȚII

67. Ce este o ecuație. *a)* Cu ajutorul algebrei se pot rezolva ușor unele probleme care se rezolvă mai greu sau nu se pot rezolva de loc pe baza cunoștințelor de aritmetică. În algebră, aceste probleme se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor. Pentru a arăta ce este o ecuație, luăm ca exemplu problema următoare:

Un muncitor depășește în fiecare zi norma cu 4 piese. În felul acesta, el face în 3 zile cît ar fi trebuit să facă în 4 zile. Cîte piese trebuia să facă într-o zi?

Notăm cu x numărul care arată cîte piese trebuia să facă muncitorul într-o zi. Depășind norma cu 4 piese pe zi, el face în fiecare zi $(x+4)$ piese, iar în 3 zile el face $3(x+4)$ piese. Dacă nu depășea norma, el făcea cîte x piese pe zi, deci în 4 zile el ar fi făcut $4x$ piese. În problemă se spune că muncitorul face în 3 zile cît ar fi trebuit să facă în 4 zile, deci:

$$3(x+4)=4x.$$

Am obținut o *ecuație*. Litera x reprezintă *necunoscuta*. Expresia $3(x+4)$ se numește *partea stîngă* sau *membrul stîng*, iar $4x$ se numește *partea dreaptă* sau *membrul drept al ecuației*.

b) Noi trebuie să aflăm cît este x. Să încercăm $x = 10$. Înlocuind în ecuaţie x prin 10, membrul stîng devine

$$3(x+4) = 3(10+4) = 3 \cdot 14 = 42,$$

iar membrul drept devine:

$$4x = 4 \cdot 10 = 40.$$

Valoarea numerică a membrului stîng nu este egală cu valoarea numerică a membrului drept. Valoarea $x = 10$ nu corespunde, se spune că ea *nu satisface* ecuaţia, ea nu este o *soluţie* sau o *rădăcină* a ecuaţiei.

Pentru $x = 12$, membrul stîng devine

$$3(x+4) = 3 \cdot (12+4) = 3 \cdot 16 = 48,$$

iar membrul drept devine:

$$4x = 4 \cdot 12 = 48.$$

Pentru $x = 12$, cele două părţi ale ecuaţiei capătă aceeaşi valoare numerică. $x = 12$ *satisface* ecuaţia; $x = 12$ este o *soluţie* sau o *rădăcină* a ecuaţiei.

A rezolva o ecuaţie înseamnă a găsi rădăcina ei (sau rădăcinile ei, dacă sînt mai multe).

E x e m p l e. Dăm mai jos cîteva exemple de ecuaţii şi, în dreptul fiecărei ecuaţii, rădăcina (rădăcinile) ei.

a) $3x - 1 = 2x + 7$; $x = 8$.

b) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x+4}{x-4} = 7$; $x = 6$.

c) $x^2 + 10 = 7x$; $x = 2$ şi $x = 5$.

d) $x^3 - 7x + 6 = 0$; $x = 1$, $x = 2$ şi $x = -3$.

Fiecare dintre aceste ecuații conține cîte *o singură necunoscută*, care se notează de obicei cu x. În exemplul *a)* necunoscuta figurează numai la puterea întîi; această ecuație este *de gradul întîi*. Exemplul *c)* conține x^2 și nu conține nici o putere a necunoscutei mai mare ca doi. Această ecuație este de gradul doi. Ecuația din exemplul *d)* este de gradul trei.

În acest capitol, ne vom ocupa numai de ecuații de gradul întîi cu o necunoscută.

68. **Proprietăți ale ecuațiilor.** Problema principală care se pune în legătură cu ecuațiile este problema rezolvării lor. Pentru a putea explica regulile necesare, trebuie să stabilim întîi unele proprietăți ale ecuațiilor.

Considerăm, de exemplu, ecuația:

$$4x + 20 = 300,$$

a cărei rădăcină este $x = 70$.

Să presupunem că x reprezintă greutatea unui obiect, de exemplu a unei bucăți de ciocolată, exprimată în grame. Atunci ecuația ne spune că 4 bucăți de ciocolată și încă 20 g cîntăresc împreună 300 g. Cu alte cuvinte, dacă punem pe un taler al unei balanțe 4 bucăți de ciocolată și o greutate de 20 g, iar pe celălalt taler o greutate de 300 g, balanța este în echilibru (fig. 15).

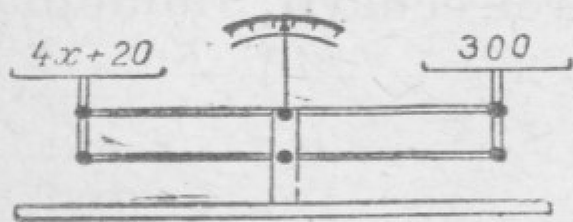


Fig. 15

1) Dacă adăugăm pe ambele talere aceeași greutate, de exemplu 10 g, balanța rămîne în echilibru. Dar atunci vom avea pe un taler:

$4x+20+10=4x+30$ grame, iar pe celălalt taler: $300+10=310$ g, deci ecuaţia va fi:

$$4x+30=310.$$

Această ecuaţie se obţine din prima, adăugînd în ambii membri numărul 10. Ecuaţia a doua are aceeaşi soluţie cu prima.

Proba: $4x+30=4\cdot70+30=310$; $310=310$.

Prin urmare, dacă adăugăm la ambii membri ai unei ecuaţii acelaşi număr, obţinem o ecuaţie care are aceeaşi soluţie cu ecuaţia dată. Se spune că, într-o ecuaţie, *avem voie* să adăugăm la ambii membri acelaşi număr.

2) Ce se întîmplă dacă luăm de pe ambele talere aceeaşi greutate, de exemplu cîte 10 g? Balanţa rămîne în echilibru. Atunci rămîne pe un taler $4x+20-10=4x+10$ grame, iar pe celălalt taler $300-10=290$ g. Ecuaţia va fi:

$$4x+10=290.$$

Această ecuaţie va admite tot aceeaşi soluţie: $x=70$.

Proba: $4x+10=4\cdot70+10=290$; $290=290$.

Deci, într-o ecuaţie, *avem voie* să scădem din ambii membri acelaşi număr.

3) Dacă punem pe un taler de 2 ori, de 3 ori sau de un număr oarecare de ori mai multe bucăţi de ciocolată şi tot de atîtea ori mai multe greutăţi de cîte 20 g, iar pe celălalt taler tot de atîtea ori mai multe greutăţi de cîte 300 g, balanţa rămîne în echilibru. Să luăm cazul cînd înmulţim cu 5. Atunci vom avea pe primul taler $5(4x+20)$ grame, iar pe talerul al doilea, $300\cdot5=1\,500$ g.

Ecuaţia va fi:

$$5(4x+20)=1\,500.$$

Această ecuaţie va avea tot soluţia $x=70$.

Proba: $5(4x+20)=5(4\cdot 70+20)=5(280+20)=$
$=5\cdot 300=1\,500$; $1\,500=1\,500$.

Deci, într-o ecuaţie *avem voie* să înmulţim ambii membri cu acelaşi număr diferit de zero.

4) Dacă micşorăm de un număr oarecare de ori, de exemplu de 5 ori, ceea ce se găseşte pe fiecare taler al balanţei, balanţa rămîne în echilibru. Atunci ecuaţia va fi:

$$\frac{4x+20}{5}=60.$$

Această ecuaţie are aceeaşi soluţie ca prima, $x=70$

Proba: $\frac{4x+20}{5}=\frac{4\cdot 70+20}{5}=\frac{300}{5}=60$; $60=60$.

Aşadar, într-o ecuaţie *avem voie* să împărţim ambii membri prin acelaşi număr diferit de zero.

Într-o ecuaţie avem voie:

1) *să adăugăm la ambii membri acelaşi număr*;

2) *să scădem din ambii membri acelaşi număr*;

3) *să înmulţim ambii membri cu acelaşi număr diferit de zero*;

4) *să împărţim ambii membri prin acelaşi număr diferit de zero.*

Ecuaţia ce se obţine are aceeaşi soluţie cu ecuaţia de la început.

69. **Trecerea termenilor dintr-un membru în celălalt.** Pe baza proprietăţilor de mai sus putem trece termenii dintr-un membru al unei ecuaţii în celălalt.

1) Considerăm, de exemplu, ecuaţia:

$$5x - 8 = 4x + 4;$$

scădem din ambii membri $4x$; obţinem:

$$5x - 8 - 4x = 4.$$

Observăm că termenul $4x$ a dispărut din membrul drept, iar în membrul stîng a apărut termenul $-4x$, adică acelaşi termen, dar cu semnul schimbat. Se spune că *am trecut* termenul $4x$ în membrul stîng.

2) Am obţinut ecuaţia:

$$x - 8 = 4.$$

Adăugăm la ambii membri $+8$; obţinem:

$$x = 4 + 8.$$

Termenul -8 a dispărut din membrul stîng, în schimb a apărut în membrul drept termenul $+8$, adică acelaşi termen, dar cu semnul schimbat. Se spune că *am trecut* termenul -8 în membrul drept.

Într-o ecuaţie putem trece orice termen dintr-un membru în celălalt, schimbîndu-i semnul. Ecuaţia care se obţine are aceeaşi soluţie cu cea dată.

În practică, această regulă se foloseşte pentru a aduce o ecuaţie sub formă mai simplă. Se trec toţi termenii care conţin necunoscuta în membrul stîng şi toţi termenii cunoscuţi în membrul drept.

În exemplul considerat, aceste transformări au fost suficiente pentru a rezolva ecuaţia. În alte cazuri mai sînt necesare şi alte transformări.

70. Exemple. 1. Fie ecuaţia:

$$2x + 3 = 5x - 12.$$

a) Trecem termenul $5x$ în membrul stîng şi reducem termenii asemenea:

$$2x + 3 - 5x = -12;$$

$$-3x + 3 = -12.$$

b) Trecem termenul $+3$ din membrul stîng în membrul drept şi reducem din nou termenii asemenea:

$$-3x = -12 - 3; \quad -3x = -15.$$

c) Împărţim ambii membri cu -3 şi simplificăm:

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-15}{-3}; \; x = +5.$$

Am rezolvat ecuaţia. Rădăcina ei este $x = +5$.

2. Fie ecuaţia:

$$3(x - 1) - 12 = 6 - 4(x - 2).$$

a) Desfacem parantezele:

$$3x - 3 - 12 = 6 - 4x + 8.$$

b) Reducem termenii asemenea:

$$3x - 15 = -4x + 14.$$

c) Trecem termenul $-4x$ în membrul stîng:

$$7x - 15 = 14.$$

d) Trecem termenul -15 în membrul drept:

$$7x = 29.$$

e) Împărţim ambii membri ai ecuaţiei prin 7:

$$x = \frac{29}{7} = 4\,\frac{1}{7}.$$

Ecuaţia este rezolvată. Rădăcina ei este:

$$x = 4\,\frac{1}{7}.$$

3. Fie ecuaţia:

$$\frac{x - 1}{6} - \frac{2x + 1}{5} = 1 - \frac{7x - 19}{10}.$$

Trebuie, mai întîi, să scăpăm de numitori. Pentru aceasta:

a) Înmulţim ambii membri cu c.m.m.m.c. al numitorilor, care este 30 (şi facem simplificările):

$$5(x - 1) - 6(2x + 1) = 30 - 3(7x - 19).$$

b) Desfacem parantezele:

$$5x - 5 - 12x - 6 = 30 - 21x + 57.$$

c) Reducem termenii asemenea:

$$-7x - 11 = -21x + 87.$$

d) Trecem $-21x$ în membrul stîng:

$$14x - 11 = 87.$$

c) Trecem -11 în membrul drept:

$$14x = 98.$$

f) Împărţim ambii membri prin 14:

$$x = 7.$$

Ecuaţia este rezolvată.

Unele lucrări se pot contopi. De exemplu, după ce am ajuns la ecuația:

$$5x - 5 - 12x - 6 = 30 - 21x + 57,$$

putem proceda astfel: subliniem toți termenii care conțin necunoscuta și reducem termenii asemenea, luînd termenii din membrul celălalt, cu semnul schimbat: $5x - 12x = -7x \ldots + 21x = 14x$. Apoi: $-5-6=-11, \ldots$, trecut în membrul al doilea, dă $+11 \ldots + 30 = 41 \ldots + 57 = 98$. Se obține astfel de-a dreptul ecuația $14x = 98$.

71. **Schema generală de rezolvare a ecuațiilor de gradul I cu o necunoscută.** În exemplele precedente, după o serie de transformări am obținut ecuațiile $7x = 29$, respectiv $14x = 98$, adică niște ecuații în care membrul stîng este un monom de gradul I, iar membrul drept este un număr cunoscut. Asemenea ecuații se numesc *ecuații de gradul I cu o necunoscută.*

Pentru a rezolva o ecuație de gradul I cu o necunoscută procedăm astfel:

a) Eliminăm numitorii (înmulțim ambii membri cu c.m.m.m.c. al numitorilor).

b) Desfacem parantezele.

c) Trecem termenii necunoscuți în membrul întîi, iar cei cunoscuți în membrul al doilea și reducem termenii asemenea.

d) Împărțim ambii membri prin coeficientul lui x.

Bineînțeles, aceste transformări se fac numai cînd este cazul. În unele cazuri, este mai bine să procedăm altfel. De exemplu, în cazul ecuației:

$$2(x - 1) = 10,$$

este mai bine să nu desfacem parantezele. Împărțim ambii membri ai ecuației prin 2:

$$x - 1 = 5, \text{ de unde: } x = 6.$$

72. Ecuații care conțin necunoscuta la numitor. Considerăm ecuația:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{3}.$$

Cînd $x = 2$, numitorul fracției a doua devine zero și fracția își pierde sensul. Trebuie deci să presupunem că $x \neq 2$. C.m.m.m.c. al numitorilor este $6(x - 2)$.

Trebuie să înmulțim ambii membri ai ecuației cu această expresie. Obținem:

$$x - 2 + 6 = 4(x - 2); \quad x + 4 = 4x - 8;$$
$$-3x = -12; \quad x = 4.$$

Deoarece valoarea pe care am obținut-o pentru x este diferită de valoarea exclusă, $x = 2$, ea este soluția ecuației.

73. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor. Să arătăm cum putem folosi ecuațiile pentru a rezolva problema:

1) *Pentru 11 m pînză s-a plătit 132 de lei, după ce s-a ieftinit cu 1,50 lei la metru. Care a fost prețul unui metru de pînză înainte de ieftinire?*

Rezolvare. Notăm cu x numărul care arată (în lei) prețul unui metru de pînză.

Prețul întreg al unui metru...x

Prețul redus al unui metru...$x - 1{,}50$

Prețul redus a 11 metri......$11(x - 1{,}50)$.

Problema spune că s-a plătit pentru 11 m de pînză 132 de lei. Ecuaţia problemei este:

$$11\,(x - 1{,}50) = 132.$$

Rezolvînd ecuaţia, obţinem: $x = 13{,}50$.

Răspuns. Preţul unui metru de pînză a fost 13,50 lei.

Proba. Preţul redus al unui metru de pînză este: $13{,}50 - 1{,}50 = 12$ lei; 11 m de pînză costă $12 \cdot 11 = 132$ de lei, aşa cum se dă în problemă.

2) *Avem două vase cu apă A şi B. Apa din vasul A are 85° şi se răceşte cu 1,5° pe minut. Apa din vasul B are 19° şi se încălzeşte cu 4° pe minut.*

După cît timp va avea apa din cele două vase aceeaşi temperatură?

Notăm cu x numărul care arată după cîte minute temperaturile se vor egala.

În x minute, temperatura apei din A scade cu . . . . $1{,}5x$

Temperatura apei din A după x minute . . . . $85-1{,}5x$

În x minute, temperatura apei din B creşte cu . . . . $4x$

Temperatura apei din B după x minute . . . . $19+4x$

Ecuaţia problemei este:

$$85 - 1{,}5x = 19 + 4x.$$

Soluţia ei este $x = 12$.

Răspuns. Temperaturile se egalează după 12 minute.

Proba. Apa din primul vas s-a răcit cu $1{,}5° \cdot 12 = 18°$ şi are acum $85° - 18° = 67°$; apa din vasul al doilea s-a încălzit cu $4° \cdot 12 = 48°$ şi are acum $19° + 48° = 67°$. Cele două temperaturi sînt egale.

3) *Distanța dintre două orașe A și B este de 40 km. Din A pleacă în același timp spre B un biciclist și un motociclist. Viteza motociclistului este de 4 ori mai mare decît viteza biciclistului și motociclistul ajunge în B cu 2 ore înaintea biciclistului. Care este viteza biciclistului?*

Notăm cu x viteza biciclistului, exprimată în kilometri pe oră (biciclistul face x km pe oră). Viteza motociclistului (kilometri pe oră)...$4x$.

Timpul în care biciclistul parcurge drumul de la A la B...$\frac{40}{x}$.

Timpul în care motociclistul parcurge drumul de la A la B...$\frac{40}{4x} = \frac{10}{x}$.

Se dă că motociclistul ajunge cu două ore înaintea biciclistului, adică timpul cît merge motociclistul este cu două ore mai scurt decît timpul cît merge biciclistul. Dacă din $\frac{40}{x}$ scădem 2, trebuie să obținem $\frac{10}{x}$; $\frac{40}{x} - 2 = \frac{10}{x}$.

Aceasta este ecuația problemei. Rezolvînd-o, obținem: $x = 15$.

Răspuns. Viteza biciclistului este de 15 km pe oră.

Proba. Biciclistul parcurge distanța AB în $40 : 15 = 2\frac{2}{3}$ ore, viteza motociclistului este de $15 \cdot 4 = 60$ km pe oră; el parcurge această distanță în $40 : 60 = \frac{2}{3}$ ore. $2\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 2$ ore, așa cum se dă în problemă.

4) *O moară urma să macine, conform planului, 50 de vagoane grîu pe lună. În prima lună, ea*

depășește planul cu un anumit procent iar în luna următoare, numărul care arată cu cîte procente moara depășește planul este cu 4 mai mare. În aceste două luni, moara macină 10 vagoane de grîu peste plan. Cu cît la sută a depășit planul moara în prima lună?

Rezolvare. Notăm cu x numărul care arată cu cît la sută a depășit moara planul în prima lună. În luna a doua, planul a fost depășit cu .... $(x + 4)\%$

Cantitatea de grîu măcinat peste plan în prima lună... $\frac{x}{100} \cdot 50 = \frac{x}{2}$.

Cantitatea de grîu măcinat peste plan în luna a doua... $\frac{x+4}{100} \cdot 50 = \frac{x+4}{2}$.

Cantitatea totală de grîu măcinat peste plan...

$$\frac{x}{2} + \frac{x+4}{2}.$$

În problemă se dă că această cantitate este de 10 vagoane. Ecuația problemei este:

$$\frac{x}{2} + \frac{x+4}{2} = 10.$$

Soluția ei este: $x = 8$.

Răspuns. În prima lună, moara a depășit planul cu 8%.

Proba. În luna a doua, moara a depășit planul cu $8 + 4 = 12\%$. În prima lună s-au măcinat peste plan: $\frac{50 \cdot 8}{100} = 4$ vagoane; în luna a doua: $\frac{50 \cdot 12}{100} = 6$ vagoane; în ambele luni $4+6=10$ vagoane, așa cum se dă în problemă.

74. **Interpretarea soluțiilor negative.** Cînd rezolvăm o problemă cu ajutorul unei ecuații și obținem o soluție negativă se pot întîmpla două cazuri. Dacă mărimea pe care o reprezintă necu-

noscuta nu poate lua valori negative, înseamnă că problema este imposibilă. Dacă însă mărimea poate lua valori negative, soluţia negativă are un înţeles.

Exemple. *a) Într-o şcoală sînt 180 de băieţi şi un număr de fete. S-au cumpărat bilete de cinema pentru toată şcoala. Un bilet costă 2,50 lei şi s-au cheltuit în total 400 de lei. Cîte fete sînt în şcoală?*

Notăm cu x numărul fetelor.

Numărul biletelor cumpărate... $x + 180$.

Valoarea biletelor (în lei)... $2{,}50\ (x + 180)$.

Se dă că această valoare este de 400 de lei. Deci:

$$2{,}50\ (x + 180) = 400.$$

Rezolvînd ecuaţia găsim: $x = -20$.

Numărul fetelor din şcoală nu poate fi negativ. Această problemă este imposibilă.

Acest lucru se putea observa de la început. Cele 180 de bilete pentru băieţi costă $2{,}50 \cdot 180 = 450$ de lei. Este imposibil ca din 400 de lei să se cumpere bilete pentru toată şcoala.

b) Punem acum o problemă asemănătoare.

Într-o şcoală sînt 180 de elevi. Un bilet de cinema costă 2,50 lei şi şcoala a cumpărat bilete de 400 de lei. Cîţi copii mai pot fi invitaţi să meargă la cinema cu aceste bilete?

Notăm cu x numărul copiilor invitaţi.

Numărul biletelor necesare...$x + 180$.

Costul biletelor este (în lei)...$2{,}50(x + 180)$.

Ecuaţia problemei este aceeaşi ca mai înainte, deci soluţia este tot: $x = -20$.

Acum soluţia poate fi *interpretată*. Trebuie să mai vină -20 de copii. Aceasta înseamnă că

trebuie să plece 20 de copii, adică 20 de elevi ai școlii rămîn fără bilete.

75. **Încheiere.** Rezolvarea unei probleme cu ajutorul ecuațiilor se compune din următoarele părți: *a)* punerea problemei în ecuație; *b)* rezolvarea ecuației; *c)* formularea răspunsului la problemă; *d)* proba.

Proba se face pe baza conținutului problemei, nu introducînd valoarea lui x în ecuație, din motivele următoare: în primul rînd, trebuie văzut dacă soluția poate fi acceptată. De exemplu, dacă x reprezintă un număr de oameni și obținem pentru x o valoare fracționară, problema este imposibilă, deși ecuația are o soluție. În al doilea rînd, dacă am greșit numai la punerea problemei în ecuație, valoarea aflată pentru necunoscută satisface ecuația, deși nu corespunde problemei.

Cînd soluția este negativă, trebuie căutată interpretarea ei.

EXERCIȚII

Să se rezolve ecuațiile următoare:

1. *a)* $3x - 1 = 14$; *b)* $2x + 15 = 3$.
2. *a)* $8 = 3x - 1$; *b)* $2x = 7x - 6$.
3. *a)* $6 = x - 0{,}3$; *b)* $0 = 3x - 8{,}7$.
4. *a)* $7x = 1 - 5x$; *b)* $1 - 2x = 2x - 1$.
5. *a)* $3 - 2x = x + 15$; *b)* $0{,}9 = 0{,}5 - 2x$.
6. *a)* $3 - 1{,}6x = 8 + 1{,}4x$;
b) $1{,}4 + 1{,}5x = 1{,}6 + 1{,}7x$.

---

6. *a)* $-1\frac{2}{3}$; *b)* -1.

7. *a)* $3\frac{1}{5}+x=2{,}8-x;$

b) $1\frac{5}{8}-3x=3\frac{3}{4}+2x.$

8. *a)* $2x-5\frac{1}{4}=3x+2\frac{1}{4};$

b) $5\frac{2}{3}-2x=3\frac{1}{6}-3x.$

9. $3(x-1)-2(x+2)=-4.$

10. $2x-3-2(x-2)=10-3(x-1).$

11. $5(x-2)-2(x-3)=6(x-1)-3.$

12. $0{,}02x=2(0{,}6-0{,}04x)-0{,}2(0{,}5x-2).$

13. $(x+1)(x-2)+(x+3)(x-3)=$
$=(x-1)(x+2)+(x+3)^2.$

14. $(2x+1)^2-(x+2)^2=(3x+1)^2-$
$-(x-3)^2-5x^2-7.$

15. $3(x-1)(x+2)-(2x+1)^2=$
$=(2x+3)(2x-3)-x(5x+2).$

16. *a)* $\frac{x}{3}-1=\frac{x}{5};$ *b)* $\frac{2x}{5}+\frac{3x}{10}=7.$

17. *a)* $1-2x=\frac{x}{3}-1;$ *b)* $\frac{1}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{3}-\frac{x}{2}.$

---

7. *a)* $-0{,}2$; *b)* $-\frac{17}{40}$. 8. *a)* $-7\frac{1}{2}$; *b)* $-2\frac{1}{2}$.

9. 3. **10.** 4. **11.** $1\frac{2}{3}$. **12.** Ecuaţia se înmulţeşte în prealabil cu 100; $x=8$. **13.** $-2\frac{1}{4}$. **14.** 1. **15.** -2.

18. *a)* $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} + 1$; *b)* $1 - \frac{x}{2} = \frac{5x}{6} - 1$.

19. *a)* $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{5x}{6}$;

b) $x - \frac{2x}{3} = 2x + \frac{x}{6}$.

20. *a)* $1 + \frac{2x-1}{3} = x - \frac{x+1}{2}$;

b) $\frac{3x-1}{8} = \frac{x+5}{4} - 1$.

21. $\frac{x}{2} + \frac{x+2}{4} + \frac{x+6}{8} = \frac{3x-2}{4} + \frac{5x-2}{8}$.

22. $x + \frac{1-x}{4} = \frac{x+3}{6} - \frac{x+7}{2}$.

23. $\frac{4x-1}{3} - 4 = 1 - \frac{x-4}{6} + \frac{3x+5}{4} - 4\frac{1}{4}$.

24. $\frac{7x-1}{25} - \frac{x+3}{20} = \frac{4x+9}{10} - \frac{x+5}{5}$.

25. $\frac{3(x-1)}{4} - \frac{2(x+1)}{3} = \frac{x+1}{2} - \frac{11}{4}$.

26. $\frac{7x-2}{3} - \frac{4}{5}(x+3) + 6 = \frac{3(x+2)}{2}$.

27. $\frac{3(x+1)}{2} - \left(\frac{x+1}{6} + 3\right) = \frac{5x+2}{3} - \left(\frac{3x-1}{2} - 3\right)$.

28. $\frac{x+1}{2} - \left(1 + \frac{x-1}{2}\right) = \frac{x-3}{4} - \left(\frac{2x-1}{3} - 1\right)$.

---

18. *a)* $8\frac{4}{7}$; *b)* $1\frac{1}{2}$. **21.** 4. **22.** -3. **23.** 4. **24.** 3. **25.** 2. **26.** 2. **27.** 5. **28.** $1\frac{2}{5}$.

29. $\frac{(2x+1)^2}{4} - \frac{(3x-1)^2}{9} = \frac{15x+10}{18}$.

30. $\frac{(x+2)\ (x-2)}{2} + \frac{(2x-1)\ (x+2)}{4} = (x+1)^2 + 3x - 5$.

31. *a)* $\frac{x-1}{x+1} = \frac{3}{5}$; *b)* $\frac{x}{x+2} = \frac{5}{7}$.

32. *a)* $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-1}{x+2}$; *b)* $\frac{2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x-2}$.

33. *a)* $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x}{x-3}$; *b)* $\frac{x+1}{2x-4} - \frac{2}{3x-6} = \frac{1}{6}$.

34. *a)* $\frac{2x-1}{3x+2} - \frac{3x+1}{6x+4} = \frac{1}{2}$;

b) $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{1}{3} = \frac{2x+3}{3x-3}$.

35. $\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{6x-3} + \frac{1}{4x-2} = \frac{11}{18}$.

36. $\frac{4x-3}{2x-6} - \frac{3}{4x-12} = \frac{x+1}{x-3} - 1$.

37. $\frac{x+1}{8x-12} - \frac{2x+1}{4x-6} = \frac{3x-1}{2x-3} - \frac{4x-23}{12x-18}$.

---

29. $\frac{1}{2}$. **30.** $\frac{6}{17}$. **31.** *a)* 4; *b)* 5. **32.** *a)* 0; *b)* $\frac{1}{5}$. **33.** *a)* $\frac{3}{2}$; *b)* $-\frac{1}{2}$. **34.** *a)* $-2\frac{1}{2}$; *b)* 5. **35.** 2. **36.** $3\frac{1}{8}$. **37.** -1.

38. *a)* $\frac{3}{4x+8}-\frac{1}{2x-4}=\frac{x+5}{x^2-4}$;

b) $\frac{4}{3x+3}-\frac{2x-11}{(x+1)^2}=\frac{3}{2x+2}$.

39. *a)* $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2x-4}=\frac{2x-1}{(x-2)^2}$;

b) $\frac{3}{2(x+a)}-\frac{1}{4(x-a)}=\frac{x}{x^2-a^2}$.

Probleme

1. Să se afle un număr, ştiind că: *a)* dublul lui, mărit cu 1, este egal cu triplul lui, micşorat cu 7; *b)* dublul lui, micşorat cu 1, este egal cu triplul lui, mărit cu 5; *c)* dublul lui mărit cu 3 este egal cu triplul lui.

2. Scad un anumit număr din 583, apoi adaug acelaşi număr la 147 şi obţin acelaşi rezultat. Care este numărul?

3. Mă gîndesc la un număr. Îi adaug 1, înmulţesc rezultatul cu 2, adaug 3, înmulţesc rezultatul cu 4 şi adaug 5. Rezultatul este 65. La ce număr m-am gîndit?

4. Să se afle numărul care, dacă-l înmulţim cu 7, creşte cu 168.

5. Să se afle numărul care, dacă-l împărţim prin 7, scade cu 522.

---

38. *a)* -10; *b)* 5. **39.** *a)* 8; *b)* 7 *a*. **1.** *a)* 8; *b)* -6; *c)* 3. **2.** 218. **3.** 5.

6. Diferența dintre dublul unui număr și jumătatea lui este 292. Să se afle numărul.

7. Mă gîndesc la un număr. Îi adaug 1 și împart rezultatul prin 2, apoi adaug 2 și împart rezultatul prin 3, apoi adaug 3 și împart rezultatul prin 4. Rezultatul final este 1. Să se afle numărul. Cum se schimbă rezultatul dacă continuăm operația?

8. Mă gîndesc la un număr. Îl înmulțesc cu 2, adaug 1, împart suma prin 3 și obțin un rezultat; înmulțesc numărul la care m-am gîndit cu 3, scad 1, împart diferența prin 4 și obțin un nou rezultat. Cele două rezultate sînt egale. La ce număr m-am gîndit?

9. Scad dintr-un număr 7 și înmulțesc diferența cu 3; produsul este cu 5 mai mic decît dublul numărului. Să se afle numărul.

10. Măresc un număr cu 1 și înmulțesc suma cu 4, produsul obținut este cu 58 mai mare decît triplul acelui număr. Să se afle numărul.

11. Scad dintr-un număr 2 și înmulțesc diferența cu 3, apoi scad din același număr 3 și înmulțesc diferența cu 2. Primul rezultat este cu 17 mai mare decît al doilea. Să se afle numărul.

12. *a)* Într-o clasă sînt 31 de elevi. La sfîrșitul anului situația este următoarea: sînt de 4 ori mai mulți promovați decît premianți; numărul cori-

---

6. $194\frac{2}{3}$; 7. 1; rezultatul rămîne mereu 1. 8. 7; 9. 16; 10. 54. 11. 17. 12. *a)* 5 premianți; *b)* imposibil.

genţilor este cu 3 mai mic decît al premianţilor, iar 3 elevi sînt repetenţi. Cîţi elevi sînt premianţi, promovaţi, corigenţi? *b)* Aceeaşi problemă dacă în clasă sînt 35 de elevi.

13. Într-un triunghi ABC, unghiul B este cu $10°$ mai mare ca unghiul A, iar unghiul C este dublul unghiului B. Se cer unghiurile triunghiului.

14. Oraşul A are cu două mii mai mulţi locuitori decît oraşul B, oraşul C are cu 25 mii mai mulţi locuitori decît A, iar oraşul D are cu 15 mii mai mulţi locuitori decît C. Populaţia totală a acestor patru oraşe este de 523 mii locuitori. Cîţi locuitori are fiecare dintre aceste oraşe?

15. În patru plicuri se găsesc 1 831 de lei. Plicul al doilea conţine mai puţin cu 1 leu decît dublul sumei din primul plic; plicul al treilea conţine cu 2 lei mai mult decît al doilea, iar plicul al patrulea — cît diferenţa dintre al treilea plic şi primul. Cît conţine fiecare plic?

16. *a)* Într-o livadă sînt 150 de pomi. Numărul merilor este cu 10 mai mare decît al perilor; numărul vişinilor este de două ori mai mare decît al merilor, iar numărul cireşilor este cu 15 mai mic decît triplul numărului merilor. Cîţi pomi sînt de fiecare fel? *b)* Aceeaşi problemă, dacă în livadă sînt 160 de pomi.

17. În anul 1958 s-a produs în ţara noastră cu 52 mii tone mai multă fontă decît în 1957;

---

13. $A = 37°30'$. **14.** 113, 115, 140, 155 mii. **15.** Primul plic conţine 305 lei. **16.** *a)* Sînt 15 peri; *b)* imposibil.

producţia de fontă din anul 1959 a fost cu 135 mii tone mai mare decît media din cei doi ani precedenţi, iar producţia din 1960 a fost cu 257 mii tone mai mare decît media celor trei ani precedenţi. În total, s-au produs în aceşti patru ani 3 285 mii tone fontă. Să se afle producţia de fontă din fiecare din aceşti ani.

18. Avem 3 cutii cu bomboane. Cutia a doua conţine cu 1 kg mai mult decît prima, iar cutia a treia, cu 1 kg mai mult decît a doua. Bomboanele din prima cutie costă 22 lei kilogramul, cele din cutia a doua costă 20 lei kilogramul, iar cele din cutia a treia 18 lei kilogramul. Toate bomboanele costă 356 lei. Cît conţine fiecare cutie?

19. Distanţa dintre două oraşe A şi B este de 72 km. Din ambele oraşe pornesc în acelaşi timp doi oameni şi merg unul către celălalt. Unul din ei face 6 km pe oră, iar celălalt, 4 km pe oră. Să se afle: *a)* după cîte ore va fi distanţa dintre ei de 37 km, înainte ca să se fi întîlnit; *b)* după cîte ore se întîlnesc?

20. Pînza s-a ieftinit cu 2 lei la metru; 6 m de pînză costă acum cît au costat înainte 5 m. Cît a costat un metru de pînză?

21. Un tren parcurge o distanţă de 305 km în 7 ore. În ultimele două ore, viteza trenului este cu 5 km pe oră mai mică decît în primele 5 ore. Care a fost viteza trenului în primele 5 ore?

---

17. 686, 738, 847, 1 014 mii tone. **18.** 5 kg; 6 kg; 7 kg. **19.** *a)* $3\frac{1}{2}$ ore; *b)* 7 ore 12 min. **20.** 12 lei. **21.** 45 km/oră.

22. O mașină parcurge un drum în trei etape. În prima etapă parcurge $\frac{5}{18}$ din distanță, în etapa a doua $\frac{4}{9}$ din distanță, iar în etapa a treia restul. Știind că în primele două etape a parcurs 234 km, să se afle cît a parcurs mașina în cea de-a treia etapă.

23. Într-un rezervor *A* se găsesc 120 l de benzină, iar într-un rezervor *B*, 160 l. Din *A* se consumă cîte 10 l benzină pe zi, iar din *B* cîte 15 l. *a)* După cîte zile se vor găsi în ambele rezervoare cantități egale de benzină? *b)* După cîte zile rămîne în *A* de două ori mai mult decît în *B*? *c)* După cîte zile rezervorul *A* va conține $\frac{5}{7}$ din cît conține rezervorul *B*?

24. Drumul dintre două orașe *A* și *B* urcă tot timpul. Un biciclist, cînd merge la vale, face cu 4 km pe oră mai mult decît atunci cînd merge la deal. El face drumul de la *A* la *B* în 4 ore, iar de la *B* la *A*, în 3 ore. Cu ce viteză merge biciclistul la deal?

25. Un pionier a parcurs cu bicicleta drumul dintre două orașe. La întrebarea cu ce viteză a mers, el răspunde: „Dacă viteza mea era cu 3 km pe oră mai mare, făceam tot drumul în 4 ore; dacă viteza era cu 3 km pe oră mai mică, făceam drumul în 6 ore“. Cu ce viteză a mers pionierul?

---

22. 90 km. **23.** *a)* După 8 zile; *b)* după 10 zile; *c)* cu 8 zile în urmă. **24.** Cu 12 km/oră. **25.** 15 km/oră.

26. O mașină parcurge un drum de 413 km în trei etape. Prima etapă este de 2,5 ore și în acest timp viteza mașinii este cu 8 km pe oră mai mare decît viteza reglementară; etapa a doua este de două ore și în acest timp viteza este cu 6 km pe oră sub viteza reglementară; etapa a treia este de $2\frac{1}{4}$ ore și viteza este cea reglementară. Care este viteza reglementară?

27. Distanța dintre două orașe este de 154 km. Doi bicicliști pleacă în același timp din aceste orașe și merg unul către celălalt. Viteza unuia dintre ei este cu 4 km pe oră mai mare decît a celuilalt. Ei se întîlnesc după $5\frac{1}{2}$ ore. Să se afle vitezele celor doi bicicliști.

28. Distanța dintre două orașe *A* și *B* este de 120 km. Doi bicicliști pleacă în același timp din aceste orașe și merg unul către celălalt cu o viteză de 12 km pe oră. Cu cît trebuie să-și mărească primul biciclist viteza, ca ei să se întîlnească: *a)* după 4 ore; *b)* după 5 ore; *c)* după 6 ore.

29. *A* are de 5 ori mai mulți bani decît *B*. Dacă *B* îi dă lui *A* un leu, atunci *A* are de 7 ori mai mult decît *B*. Cîți bani are fiecare din ei?

30. *A* are 9 lei, iar *B* are 19 lei. Cît trebuie să dea *A* lui *B*, pentru ca: *a)* lui *A* să-i rămînă $\frac{1}{3}$ din cît are *B*; *b)* lui *A* să-i rămînă $\frac{3}{4}$ din cît are *B*.

---

26. 60 km/oră. **27.** 12 km/oră. **28.** *a)* cu 6 km/oră; *b)* viteza rămîne neschimbată; *c)* viteza trebuie micșorată cu 4 km/oră. **29.** 4 lei; 20 lei. **30.** *a)* 2 lei; *b)* *B* trebuie să dea lui *A* 3 lei.

31. Avem un segment de dreaptă $AB = 30$ cm (A la stînga lui B) și un punct M pe el, $AM = 13$ cm. Cu cît trebuie să mutăm punctul M spre dreapta ca să avem:

a) $AM = 2\ BM$; *b)* $BM = 2\ AM$.

32. O căruță cu doi cai poate transporta cu 6 saci de grîu mai mult decît o căruță cu un singur cal. Trei căruțe cu un cal și două căruțe cu doi cai transportă în total 47 de saci cu grîu. Cîți saci transportă o căruță cu un singur cal?

33. Să se afle un număr știind că: *a)* suma formată din sfertul și șesimea lui este cu 3 mai mică decît jumătatea lui; *b)* dacă-i adaug 1 și împart suma la 2, cîtul este cu 1 mai mic decît două treimi din el; *c)* dacă-i adaug 1 și împart suma prin 2, apoi scad din el 1 și împart diferența prin 3, diferența dintre primul cît și cel de-al doilea este 3.

34. Trei băieți A, B, C cumpără împreună o minge de fotbal și contribuie în părți neegale. A dă $\frac{1}{3}$ din banii săi; B are de două ori mai mulți bani decît A și dă $\frac{1}{5}$ din banii săi; C are cu 5 lei mai puțin decît A și dă $\frac{1}{4}$ din banii săi. Mingea costă 43 de lei. Cît a avut fiecare?

35. Am 35 de lei în diferite monede. Numărul hîrtiilor de 1 leu este cu 2 mai mic decît al hîrtiilor de 3 lei; numărul monedelor de 50 de bani

---

31. *a)* cu 7 cm; *b)* cu 3 cm spre stînga. **32.** 7 saci. **33.** *a)* 36; *b)* 9; *c)* 13. **34.** A are 45 lei.

este cu 1 mai mare decît al hîrtiilor de 3 lei, iar numărul monedelor de 25 de bani este egal cu numărul celorlalte monede la un loc. Cîte monede de fiecare fel am?

36. La sfîrşitul anului, situaţia unei clase se prezenta astfel: $\frac{2}{3}$ din elevi sînt promovaţi, $\frac{2}{9}$ sînt corigenţi, iar 4 elevi sînt repetenţi. Cîţi elevi au fost în clasă?

37. O raţă sălbatică zboară deasupra unui lac şi vede o mulţime de raţe care se scaldă şi le spune: „Bună dimineaţa, vouă, o sută de surioare". Atunci o raţă de jos îi răspunde: „Nu sîntem o sută. Dar dacă am fi încă o dată pe atît şi încă o jumătate şi un sfert şi cu tine, atunci am fi o sută". Cîte raţe au fost pe lac?

38. Un grup de pionieri face o excursie. În prima zi ei fac $\frac{1}{4}$ din drum, în ziua a doua, $\frac{3}{8}$ din drum, iar în ziua a treia — restul, care este de 18 km. De cîţi kilometri a fost tot drumul?

39. Un băiat fiind întrebat cîţi pomi sînt în curtea şcolii, spune: „A treia parte din numărul pomilor sînt meri, un sfert sînt peri şi mai sînt 3 caişi". Cîţi pomi sînt în livadă?

40. Doi elevi, *A* şi *B*, rezolvă problemele propuse la olimpiadă. Într-o zi, *A* spune lui *B*: „Am rezolvat cu două probleme mai mult decît jumătate din toate problemele propuse". *B* îi răspunde:

---

35. 7 hîrtii de cîte 3 lei. **36.** 36 elevi. **37.** 36 raţe. **38.** 48 km. **39.** Imposibil.

„Eu am rezolvat cu 3 probleme mai mult decît $\frac{1}{3}$ din tot". De fapt, ei rezolvaseră același număr de probleme. Cîte probleme erau propuse?

41. Un autoturism și un camion pornesc în același timp din orașul *A* și merg spre orașul *B*. Autoturismul face 60 km pe oră, iar camionul face 40 km pe oră și autoturismul ajunge în *B* cu o oră înaintea camionului. Se cere distanța dintre orașele *A* și *B*.

42. Apa unui rîu curge cu o viteză de 3 km pe oră. O barcă merge la vale timp de 2 ore și 20 de minute, apoi se întoarce și merge la deal timp de 3 ore și 15 minute, și parcurge în total un drum de 81 km. Care este viteza proprie a bărcii?

43. Un elev pornește cu bicicleta pentru a merge din orașul *A* în orașul *B*. El merge cu o viteză de 12 km pe oră, dar la jumătatea drumului bicicleta se strică și elevul își continuă drumul pe jos, cu o viteză de 5 km pe oră. El face tot drumul în $4\frac{1}{4}$ ore. Să se afle distanța dintre cele două orașe.

44. Ce sumă a avut mama, dacă după ce a cheltuit $\frac{2}{5}$ din sumă, apoi $\frac{3}{4}$ din rest și apoi încă 16 lei, i-au mai rămas 38 lei?

45. Ce vîrstă are o persoană, știind că acum 5 ani ea avea dublul vîrstei de acum 20 de ani?

---

40. 6 probleme. **41.** 120 km. **42.** 15 km/oră. **43.** 30 km. **44.** 360 lei. **45.** 35 ani.

46. Un muncitor își rezervă o sumă de bani pentru cheltuieli neprevăzute. În cursul săptămînii, el cheltuiește jumătate din cît a avut la început și la sfîrșitul săptămînii mai adaugă 10 lei. În săptămîna următoare, el cheltuiește o treime din cît a avut la începutul acelei săptămîni și la sfîrșit adaugă 20 de lei. În săptămîna a treia, el cheltuiește un sfert din cît a avut la începutul acelei săptămîni și mai adaugă 5 lei. În cele din urmă, el are jumătate din cît a avut la început. Cît a avut muncitorul la început?

47. *a)* Într-un coș sînt 25 de ouă. La începutul fiecărei săptămîni se adaugă în coș același număr de ouă, și în cursul săptămînii se folosesc jumătate din ouăle care erau la începutul săptămînii. După trei săptămîni rămîn în coș 11 ouă. Cîte ouă se adaugă în fiecare săptămînă? *b)* Aceeași problemă, dacă la început sînt în coș tot 25 de ouă și după cinci săptămîni sînt 56 de ouă. *c)* Aceeași problemă, dacă la sfîrșitul fiecărei săptămîni rămîn în coș mereu 25 de ouă.

48. O fabrică depășește planul cu 8% și produce într-o lună mărfuri în valoare de 378 000 de lei. Care este valoarea mărfurilor pe care trebuia să le producă după plan fabrica?

49. În anul 1960 în țara noastră s-au construit din fondurile de stat cca. 27 846 de apartamente, ceea ce reprezintă o creștere de 19% față de anul 1959. Cîte apartamente s-au construit în 1959?

---

46. 100 lei. **47.** *a)* 9 ouă; *b)* 57 ouă; *c)* 25 ouă. **48.** 350 000 lei. **49.** 23 400.

50. Grîul conține 3% corpuri străine. Din cît grîu necurățat se obțin 1 455 kg de grîu curățat (care nu mai conține deloc corpuri străine)?

51. În urma unei reduceri de prețuri, bomboanele s-au ieftinit cu 14%. Cît a costat înainte de ieftinire un kilogram de bomboane care costă acum 15,48 lei?

52. Săpunul pierde prin uscare 12% din greutate. Ce cantitate de săpun proaspăt s-a cumpărat, dacă după uscare au rămas 30,800 kg de săpun?

53. La o fabrică de amidon se prelucrează două feluri de cartofi. Al doilea fel de cartofi conține cu 5% mai mult amidon ca primul. Din 10 vagoane cartofi de primul fel și 8 vagoane de felul al doilea s-au scos 3,1 vagoane amidon. Cît la sută amidon conține primul fel de cartofi?

54. Numitorul unei fracții este cu 14 mai mare decît numărătorul. Dacă mărim numărătorul ei cu 1 și micșorăm numitorul tot cu 1, obținem o fracție egală cu $\frac{1}{2}$. Să se afle fracția.

55. Numitorul unei fracții este cu 3 mai mare decît numărătorul. Dacă mărim ambii termeni cu 2, fracția devine egală cu $\frac{3}{4}$. Să se afle fracția.

56. Considerăm fracția $\frac{7}{11}$. Adăugînd la numărătorul ei un anumit număr și scăzînd același

---

50. 1 500 kg. **51.** 18 lei. **52.** 35 kg. **53.** 15%. **54.** $\frac{11}{25}$.
55. $\frac{7}{10}$.

număr din numitorul ei, obținem fracția inversă, $\frac{11}{7}$. Să se afle numărul. Generalizare pentru cazul fracției $\frac{a}{b}$ unde $a < b$. Să se examineze și cazul cînd $a > b$. Ce se întîmplă cînd $a = b$?

57. Se dă fracția $\frac{7}{15}$. *a)* Cu cît trebuie să-i mărim ambii termeni ca să obținem o fracție egală cu $\frac{1}{2}$? *b)* Cu cît trebuie să micșorăm ambii termeni ca să obținem o fracție egală cu $\frac{1}{5}$? *c)* Dacă micșorăm numărătorul cu un număr și mărim numitorul cu triplul acelui număr, obținem o fracție egală cu $\frac{1}{3}$. Să se afle numărul.

58. Doi muncitori au avut salarii egale. În urma ridicării calificării, salariul unuia dintre ei s-a mărit cu 100 lei, iar al celuilalt, cu 200 lei și ca urmare a acestui fapt, salariul primului reprezintă 90% din salariul celui de-al doilea. Ce salariu au avut acești muncitori?

59. Avem un amestec format din 30 l de alcool de 100° și 20 l de apă. *a)* Cît alcool curat (de 100°) trebuie să adăugăm pentru a avea spirt de 80°? *b)* Dar pentru a avea spirt de 50°?

60. Avem 200 g de soluție cu concentrația de 20% (20% din greutatea totală este sare, iar restul este apă). *a)* Cîtă apă trebuie să-i adăugăm ca

---

56. 4; $b - a$; $a - b$. **57.** *a)* cu 1; *b)* cu 5; *c)* numărul este 1. **58.** 800 lei. **59.** *a)* 50 litri; *b)* imposibil.

să obținem o concentrație de 5%? *b)* Cîtă sare trebuie să-i adăugăm ca să obținem o concentrație de 25%?

61. O soluție conține 30% acid sulfuric. Cît acid sulfuric curat trebuie să adăugăm la 100 cm^3 din această soluție pentru a avea o soluție de 50%?

62. Un aliaj de aur și cupru are titlul de 0,600 și cîntărește 15 g. Cît aur curat trebuie să-i adăugăm pentru a avea un aliaj cu titlul de 0,750? (Titlul unui aliaj este raportul dintre greutatea metalului fin și greutatea totală.)

63. Un aliaj de aur și cupru are titlul de 0,800 și cîntărește 30 g. Cît cupru trebuie să-i adăugăm pentru a avea un aliaj cu titlul de 0,600?

64. Avem un aliaj format din 16 g aur și 20 g cupru. Cît aur curat trebuie să-i adăugăm pentru a avea un aliaj cu titlul de: *a)* 0,900; *b)* 0,400?

65. Brațele unei pîrghii de genul întîi sînt: $OA = 70$ cm; $OB = 40$ cm. În punctul A atîrnăm o cărămidă, iar în B două cărămizi. Dacă adăugăm la cărămida din A o greutate de 500 g, pîrghia este în echilibru. Ce greutate are o cărămidă?

66. Brațele unei pîrghii de genul întîi sînt: $OA = 50$ cm; $OB = 30$ cm. În A este atîrnată o anumită greutate. Ca pîrghia să fie în echilibru, trebuie ca greutatea atîrnată în B să fie cu 10 kg mai mare. Ce greutate este atîrnată în A?

---

60. *a)* 600 g; *b)* $13\frac{1}{3}$ g. **61.** 40 cm^3. **62.** 9 g. **63.** 10 g. **64.** *a)* 164 g; *b)* imposibil (ar trebui să se scoată $2\frac{2}{3}$ g aur). **65.** 3,5 kg. **66.** 15 kg.

67. Brațele unei pîrghii de genul întîi sînt: $OA = 30$ cm, $OB = 80$ cm. În capătul A se aplică o forță de 3 kg, iar în B, de 2 kg. Cu cît și în ce sens trebuie să mutăm punctul de sprijin ca pîrghia să fie în echilibru?

68. Brațele unei pîrghii sînt: $OA = 30$ cm, $OB = 70$ cm. În A este aplicată o forță de 12 kg, iar în B de 8 kg. Vrem să scurtăm ambele brațe cu aceeași lungime, astfel ca pîrghia să fie în echilibru. Să se calculeze această lungime.

69. Brațele unei pîrghii sînt: $OA = 16$ cm, $OB = 64$ cm. În A este aplicată o forță de 15 kg, iar în B de 5 kg. Vrem să scurtăm brațul OA cu o lungime și să lungim OB cu aceeași lungime, astfel ca pîrghia să fie în echilibru. Care este această lungime?

70. Laturile unui triunghi sînt: $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 6$ cm. Printr-un punct M de pe latura AB se duce o paralelă la BC și se notează cu N punctul ei de intersecție cu AC. Să se determine distanța AM astfel ca: *a)* segmentul MN să fie egal cu MB; *b)* segmentul MN să fie egal cu NC.

71. Laturile unui triunghi sînt: $AB = 6$ cm; $BC = 5$ cm; $CA = 7$ cm. Printr-un punct M al laturii AB se duce o paralelă la BC și se notează cu N punctul ei de intersecție cu AC. Să se determine distanța $AM = x$, astfel ca perimetrul trapezului $BMNC$ să fie de 15 cm.

---

67. Cu 14 cm spre B. **68.** Brațele trebuie lungite cu 50 cm. **69.** OA trebuie lungit, OB trebuie scurtat cu 4 cm. **70.** *a)* $1\frac{7}{9}$ cm; *b)* $2\frac{2}{11}$ cm. **71.** 2,25 cm.

72. Notațiile fiind cele din problemele precedente, se dă: $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 9$ cm. Să se determine AM astfel încît: *a)* Perimetrul trapezului $BCNM$ să fie egal cu perimetrul triunghiului AMN; *b)* perimetrul triunghiului ABC să fie dublul perimetrului triunghiului AMN:

73. Laturile unui triunghi sînt: $AB = 6$ cm; $BC = 7$ cm; $CA = 9$ cm. Notăm cu D mijlocul laturii AB. Tot pe latura AB se ia un punct M, se duce prin el o paralelă la BC și se notează cu N punctul de intersecție cu AC. Să se determine segmentul $DM = x$, astfel încît perimetrul trapezului $BMNC$ să fie de: *a*) 20 cm; *b*) 17,2 cm; *c*) 18 cm; *d*) 22 cm; *e*) 14 cm.

74. Un triunghi are însușirile următoare: baza sa este cu 7 cm mai mare decît înălțimea; dacă-i micșorăm baza cu 2 cm și mărim înălțimea cu 1 cm, aria sa rămîne neschimbată. Se cere înălțimea triunghiului.

75. Avem două segmente, dintre care unul este cu 5 cm mai mare decît celălalt. Dacă mărim segmentul mai mic cu 2 cm și micșorăm segmentul mai mare cu 3 cm, media lor proporțională rămîne neschimbată. Să se afle lungimile celor două segmente.

76. Într-un triunghi dreptunghic ABC, se notează cu D piciorul înălțimii coborîte din vîrful unghiului drept A pe ipotenuză. Se știe că DC este cu 3 cm mai mare ca BD, iar AD este cu

---

72. *a)* $3\frac{3}{4}$ cm; *b)* $2\frac{1}{2}$ cm. **73.** *a)* $DM = 1{,}5$ cm, M între A și D; *b)* $DM = 0{,}6$ cm, M între B și D; *c)* M coincide cu D; *d)* M coincide cu A; *e)* M coincide cu B. **74.** 5 cm. **75.** 4 cm; 9 cm.

1 cm mai mare ca BD. Se cere lungimea segmentului BD.

77. Dacă mărim o latură a unui pătrat cu 3 cm, iar cealaltă cu 4 cm, aria sa crește cu 68 cm². Se cere latura pătratului.

78. O răsadniță are formă de pătrat (cîte răsaduri sînt într-un rînd, atîtea rînduri sînt). Grădinarul a făcut socoteală că, dacă ar pune într-un rînd cu 3 răsaduri mai mult, și ar mări tot cu 3 numărul rîndurilor, ar încăpea în răsadniță cu 219 răsaduri mai mult. Cîte răsaduri a pus într-un rînd?

79. Se plantează o livadă în formă de pătrat și, pentru aceasta, s-au adus un număr de puieți care urmează a fi sădiți la distanțe egale. Se pun în fiecare rînd un număr de puieți și rămîn 13 puieți nesădiți; dacă s-ar fi pus în fiecare rînd cu 1 mai mult și s-ar mări numărul rîndurilor tot cu 1, ar mai fi rămas loc pentru 18 puieți. Cîți puieți s-au pus într-un rînd?

Interpretarea soluțiilor negative

În problemele următoare, se va arăta, cînd este posibil, ce sens au soluțiile negative. Problemele se vor rezolva și pe cale aritmetică.

80. Cu cît trebuie să mărim numărătorul fracției $\frac{7}{15}$, ca să obținem o fracție egală cu $\frac{3}{5}$? Cu cît trebuie să mărim numărătorul aceleiași fracții ca să obținem o fracție egală cu $\frac{1}{3}$?

---

76. 1 cm. **77.** 8 cm. **78.** 35 de răsaduri. **79.** 15. **80.** Cu 2; trebuie să-l micșorăm cu 2.

81. Există bomboane de 22,50 lei kilogramul și de 18,20 lei kilogramul. S-au cumpărat 1,5 kg bomboane mai scumpe și o cantitate de bomboane mai ieftine și s-a plătit în total 32 de lei. Cît s-a cumpărat din bomboanele mai ieftine?

82. Un caiet costă 1,20 lei, iar un creion costă 0,70 lei. Cu 105 lei s-au cumpărat 94 de caiete și x creioane. Cîte creioane s-au cumpărat?

83. O gospodărie agricolă colectivă dispune de 88 500 kg de grîu pentru sămînță și s-au mai adus x kg. Grîul s-a semănat pe un teren de 520 ha, punîndu-se pe fiecare hectar 170 kg de semințe. Să se afle x.

84. O marfă oarecare a costat 12,50 lei kilogramul și s-a scumpit cu x lei la kilogram. Acum 7,50 kg costă 86,25 lei. Să se afle x.

85. Într-o clasă au fost 37 de elevi și au mai venit x elevi. Pentru a merge la un film, fiecare elev dă 1,50 lei și astfel se strîng 52,50 lei. Să se afle x.

86. Laturile unui triunghi sînt de 18,5 cm, 22,6 cm și 25,4 cm. Mărim toate laturile cu un segment de aceeași lungime x, astfel ca perimetrul triunghiului să fie de 63,5 cm. Să se afle x.

87. Într-un triunghi ABC, se dă $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm. Prin mijlocul M al laturii AB se duce o paralelă la BC și se notează cu N punctul ei de intersecție cu AC. Cu cît trebuie să mărim distanța AM, ca lungimea segmentului MN să fie de 7 cm?

---

81. Imposibil. **82.** Imposibil. **83.** Au mai rămas 100 kg. **84.** S-a ieftinit cu 1 leu la kg. **85.** Au plecat 2 elevi. **86.** Laturile trebuie micșorate cu cîte 1 cm. **87.** AM trebuie micșorat cu $\frac{1}{3}$ cm.

Capitolul VI

SISTEME DE ECUAȚII

76. O singură ecuație cu două necunoscute. Considerăm ecuația:

$$x + y = 7.$$

Ea conține două necunoscute, x și y. Toți termenii necunoscuți sînt de gradul întîi, de aceea se spune că ecuația este de gradul întîi. O asemenea ecuație se numește *ecuație de gradul întîi cu două necunoscute* sau ecuație *liniară* cu două necunoscute.

Această ecuație ne arată că suma numerelor x și y este 7. Putem noi deduce de aici valorile necunoscutelor? Nu. Putem lua $x = 1$, atunci trebuie să luăm $y = 6$; putem lua $x = 10$, atunci trebuie să luăm $y = -3$ ș.a.m.d. Tabelul de mai jos arată și alte cazuri posibile:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	10	9	8	7	6	5	4	3	2	...

Fiecare dintre aceste perechi de numere este o *soluție* a ecuației. Această ecuație are o *infinitate* de soluții (oricîte soluții vrem). Le aflăm astfel: înlocuim x din ecuație printr-o valoare *oarecare* și scoatem valoarea lui y din ecuația astfel obținută.

Se poate proceda și invers. Dăm lui y diferite valori și rezolvăm ecuația obținută în raport cu x, așa cum arată tabelul:

y	. . .	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5 . . .
x	. . .	10	9	8	7	6	5	4	3	2 . . .

O ecuație de gradul întîi cu două necunoscute are o infinitate de soluții. Pentru a le afla, dăm uneia dintre necunoscute valori oarecare și rezolvăm ecuația în raport cu cealaltă necunoscută.

E x e m p l u. Considerăm ecuația:

$$2x - 5y = 12.$$

Cele două tabele de mai jos dau diferite soluții ale acestei ecuații:

x	. . .	-6;	-3;	0;	3;	6;	9;	12;	15...
y	. . .	$-4\frac{4}{5}$;	$-3\frac{3}{5}$;	$-2\frac{2}{5}$;	$-1\frac{1}{5}$;	0;	$1\frac{1}{5}$;	$2\frac{2}{5}$;	$3\frac{3}{5}$

y	. . .	-4	-2	0	2	4	6	8	10 . . .
x	. . .	-4	1	6	11	16	21	26	31 . . .

În primul tabel am luat valorile lui x la întîmplare și am calculat valorile lui y. În tabelul al doilea am procedat invers.

77. **Observări.** 1) Faptul că o singură ecuație cu două necunoscute admite mai multe soluții are un sens concret. Considerăm problema următoare: *Într-o papetărie sînt caiete de 3 lei și de 2 lei. Vrem să cumpărăm caiete pentru 60 de lei. Cîte caiete vom cumpăra de fiecare fel?*

Notăm cu x numărul care arată cîte caiete cumpărăm din primul fel, și cu y numărul care arată cîte caiete de-al doilea fel cumpărăm. Ecuația problemei este:

$$3x + 2y = 60.$$

Tabelul de mai jos dă diferite soluţii ale acestei ecuaţii

x	...	0	2	4	6	8	10 ...
y	...	30	27	24	21	18	15 ...

Dacă ecuaţia are mai multe soluţii, atunci şi problema are mai multe soluţii. Putem lua pentru x o valoare *oarecare*; aceasta înseamnă că putem cere un număr *oarecare* de caiete de primul fel, cîte vrem (valoarea lor să nu treacă de 60 de lei). Îndată ce am ales valoarea lui x, putem afla valoarea lui y; aceasta înseamnă că, după ce am hotărît cîte caiete de primul fel cumpărăm, se ştie precis cîte caiete de-al doilea fel vom putea lua.

2) O ecuaţie cu două necunoscute, de exemplu: $2x-5y=$ $=12$ face ca fiecărei valori a lui x să-i corespundă o valoare a lui y. Se spune că y este *funcţie* de x. Aceeaşi ecuaţie face ca fiecărei valori a lui y să-i corespundă o valoare a lui x. Se poate spune că x este funcţie de y.

78. **Forma redusă.** O ecuaţie cu două necunoscute poate avea o formă mai complicată. De exemplu:

$$\frac{2x-y}{6}+\frac{y+1}{2}=\frac{x+y-1}{4}-\frac{x-1}{8}.$$

Procedînd ca la ecuaţiile cu o singură necunoscută, o putem aduce la o formă mai simplă.

Eliminăm numitorii (înmulţim ambii membri cu 24 şi simplificăm):

$$8x-4y+12y+12=6x+6y-6-3x+3.$$

Trecem termenii necunoscuţi în membrul stîng, iar pe cei cunoscuţi în membrul drept şi reducem termenii asemenea:

$$5x+2y=-15.$$

Aceasta este forma cea mai simplă (redusă) sub care poate fi pusă această ecuaţie. Ea este

formată dintr-un termen în x, un termen în y și un termen liber. Orice ecuație care poate fi adusă la această formă este *o ecuație de gradul întîi cu două necunoscute.*

79. **Sistem de ecuații liniare.** Considerăm ecuațiile:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 29; \\ 2x + 3y = 27. \end{cases}$$

Aceste ecuații formează un *sistem* de două ecuații cu două necunoscute. Aceasta înseamnă că litera x din prima ecuație reprezintă *același* număr ca în ecuația a doua, de asemenea și litera y; de aceea se pune în fața ecuațiilor o acoladă. O soluție a sistemului este formată din două numere, o valoare pentru x și una pentru y, care satisfac atît prima ecuație, cît și a doua.

În tabelul de mai jos am dat lui x diferite valori și am aflat valoarea lui y din prima ecuație.

x	—1	0	1	2	3	4	5	6
y	17	14,5	12	9,5	7	4,5	2	—0,5

În tabelul următor am făcut lucrarea analogă pentru ecuația a doua.

x	—1	0	1	2	3	4	5	6
y	$9\frac{2}{3}$	9	$8\frac{1}{3}$	$7\frac{2}{3}$	7	$6\frac{1}{3}$	$5\frac{2}{3}$	5

Se constată că, în general, perechile de numere din primul tabel nu se găsesc în tabelul al doilea, după cum perechile de numere din tabelul al doilea nu se găsesc în primul tabel. Cu alte cuvinte, prima ecuație are o infinitate de soluții, dar ele

nu satisfac ecuația a doua; ecuația a doua are și ea o infinitate de soluții, dar ele nu satisfac prima ecuație. Numai perechea $x = 3$, $y = 7$, se găsește în ambele tabele; aceste valori satisfac amîndouă ecuațiile. Soluția acestui sistem este: $x=3$, $y=7$.

Proba: $5x + 2y = 5\cdot3 + 2\cdot7 = 15 + 14 = 29$; $29 = 29$.
$2x + 3y = 2\cdot3 + 3\cdot7 = 6 + 21 = 27$; $27 = 27$.

A rezolva un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute, înseamnă a găsi cîte o valoare pentru fiecare necunoscută care să satisfacă amîndouă ecuațiile.

Am reușit să rezolvăm sistemul de mai sus prin încercări. În cele ce urmează vom da metode de a rezolva un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute.

80. **Metoda substituției.** 1) Considerăm sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26; \\ y = 2x + 1. \end{cases}$$

Ecuația a doua ne arată că y este egal cu $2x+1$. Deci, putem înlocui în prima ecuație y prin $2x+1$. Obținem:

$$3x + 4(2x + 1) = 26.$$

Am obținut o ecuație cu o singură necunoscută. O rezolvăm:

$$3x + 8x + 4 = 26; \qquad 11x = 22;\ x = 2.$$

Introducem această valoare a lui x în ecuația a doua; obținem:

$$y = 2\cdot2 + 1 = 4 + 1 = 5.$$

Soluția sistemului este: $x = 2$; $y = 5$.

Am înlocuit y din prima ecuaţie prin expresia $2x + 1$, adică am făcut o substituţie. Datorită substituţiei, am *eliminat* necunoscuta y. Această metodă se numeşte *metoda eliminării prin substituţie*, sau pe scurt, *metoda substituţiei*.

2) În exemplul precedent, una dintre ecuaţiile sistemului avea o formă specială; în membrul stîng numai y, iar în membrul drept, o expresie care nu conţine y. Dacă o ecuaţie nu are această formă, i-o dăm noi, ca în exemplul următor:

$$\begin{cases} x + 5y = 17; \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$$

În prima ecuaţie, trecem termenul $5y$ în membrul drept; obţinem

$$x = 17 - 5y.$$

Introducem în ecuaţia a doua, în locul lui x, expresia $17 - 5y$; obţinem

$$3(17 - 5y) + 2y = -1; \; 51 - 15y + 2y = -1;$$

$$-13y = -52, \; y = 4.$$

Introducem această valoare a lui y în expresia lui x

$$x = 17 - 5y = 17 - 5 \cdot 4 = -3.$$

Soluţia sistemului este: $x = -3$; $y = 4$.

3) Fiind dat un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, metoda substituţiei se poate aplica sub patru forme: *a)* se poate scoate x din prima ecuaţie; *b)* se poate scoate y din prima ecuaţie; *c)* se poate scoate x din ecuaţia a doua; *d)* se poate scoate y din ecuaţia a doua. Este bine să scoatem x sau y din acea ecuaţie unde are coeficientul 1, cum a fost cazul lui x din prima ecuaţie.

81. Metoda reducerii. 1) Fie sistemul:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 17; \\ 2x + 5y = 31. \end{cases}$$

Dacă x și y sînt numere care satisfac sistemul, expresia $4x - 5y$ are valoarea 17, iar $2x + 5y$ are valoarea 31. Atunci suma acestor două expresii are valoarea $17 + 31 = 48$. Avem deci voie să adunăm membrul stîng cu membrul stîng și membrul drept cu membrul drept. Făcînd aceasta, y se reduce și obținem:

$$6x = 48; \qquad x = 8.$$

Introducem această valoare a lui x în una din cele două ecuații date, de exemplu în prima:

$$4 \cdot 8 - 5y = 17; \;\; 32 - 5y = 17; \;\; -5y = -15;$$

$$y = 3.$$

Soluția sistemului este: $x = 8$; $y = 3$.

Am reușit să rezolvăm acest sistem datorită faptului că, atunci cînd am adunat ecuațiile, una dintre necunoscute, y, s-a redus. În felul acesta, am eliminat necunoscuta y. Această metodă se numește *metoda eliminării prin reducere*, sau, pe scurt, *metoda reducerii*.

2) Considerăm acum sistemul:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 33; \\ 7x + 6y = 47. \end{cases} \left| \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

În exemplul precedent, y s-a redus deoarece coeficientul lui din prima ecuație era opus celui din ecuația a doua (-5 și $+5$). În cazul de față,

această condiție nu mai este îndeplinită. Vom face ca sistemul să îndeplinească această condiție.

Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație cu —3, și a doua cu 2 (acești factori se scriu la dreapta liniei verticale). Obținem:

$$\begin{cases} -15x - 12y = -99; \\ 14x + 12y = \quad 94. \end{cases}$$

Adunăm ecuațiile:

$$-x = -5; \quad x = 5.$$

Introducem această valoare a lui x în una din cele două ecuații date, de exemplu în prima ecuație:

$$5 \cdot 5 + 4y = 33; \; 4y = 8; \; y = 2.$$

Soluția sistemului este: $x = 5$; $y = 2$.

De ce am înmulțit ecuațiile tocmai cu —3 și 2? Trebuia să înmulțim fiecare ecuație astfel încît coeficienții lui y să fie egali în valoare absolută. Înmulțind prima ecuație cu 2, 3, 4,..., coeficientul lui y devine: 8, 12, 16,..., adică un multiplu al lui 4; dacă înmulțim ecuația a doua cu 2, 3, 4,..., coeficientul lui y devine 12, 18, 24,..., adică un multiplu al lui 6. Coeficientul lui y din cele două ecuații va trebui să fie un multiplu comun al numerelor 4 și 6. Alegem c.m.m.m.c. și anume 12; $12:4 = 3$, de aceea înmulțim prima ecuație cu 3; $12 : 6 = 2$, de aceea înmulțim ecuația a doua cu 2. De fapt, înmulțim prima ecuație cu —3, nu cu 3, ca să obținem coeficienți opuși. Puteam tot așa de bine să înmulțim prima ecuație cu 3, dar atunci trebuia să înmulțim ecuația a doua cu —2, nu cu 2.

3) Pentru a rezolva acest sistem, am eliminat necunoscuta y. Puteam elimina necunoscuta x.

Pentru aceasta ar fi trebuit să înmulţim prima ecuaţie cu —7 şi a doua cu 5. Am preferat prima cale, pentru că intervin numere mai mici.

E x e m p l u. În practică, lucrările se aşază ca în exemplul următor:

$$\begin{cases} 12x - 8y = 28 \\ 15x + 4y = 42 \end{cases} \begin{vmatrix} -5 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{r} -60x + 40y = -140 \\ 60x + 16y = \quad 168 \\ \hline 56y = \quad 28 \end{array}$$

$$y = \frac{28}{56} = \frac{1}{2};$$

$$12x - 8 \cdot \frac{1}{2} = 28$$

$$12x - 4 = 28$$

$$12x = 32$$

$$x = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3};$$

$$x = 2\frac{2}{3};\ y = \frac{1}{2}.$$

Nu este necesar să se scrie ecuaţiile din rîndurile 3 şi 4. Înmulţirea şi reducerea termenilor asemenea se poate face mintal, astfel:

$12x(-5) = -60x$, $15x \cdot 4 = 60x$, $-60x$ cu $60x$ se reduce

$-8y(-5) = 40y$, $4y \cdot 4 = 16y$, $40y + 16y = 56y$;
$28(-5) = -140$, $42 \cdot 4 = 168$, $-140 + 168 = 28$.

Apare astfel direct ecuaţia $56y = 28$.

82. **Observare.** Metoda aducerii la același termen de comparație folosită în aritmetică nu se deosebește mult de metoda reducerii. Considerăm problema: 5 *caiete și 4 creioane costă* 33 *de lei*; 7 *caiete și* 6 *creioane costă* 47 *de lei. Cît costă un caiet, cît costă un creion?*

Notăm cu x numărul care arată (în lei) cît costă un caiet și cu y, cît costă un creion. Ecuațiile problemei sînt: $5x + 4y = 33$; $7x + 6y = 47$. Am rezolvat acest sistem la § 81. În schema de jos se pun față în față cele două procedee:

5 caiete și 4 creioane costă 33 de lei	$5x + 4y = 33$	3
7 caiete și 6 creioane costă 47 de lei	$7x + 6y = 47$	2
15 caiete și 12 creioane costă 99 de lei	$15x + 12y = 99$	
14 caiete și 12 creioane costă 94 de lei	$14x + 12y = 94$	
1 caiet costă .... 5 lei	$x = 5$	

83. **Exemplu.** Cînd ecuațiile au o formă mai complicată, le aducem întîi sub forma cea mai simplă, apoi aplicăm una dintre metode. De cele mai multe ori se folosește metoda reducerii; metoda substituției se folosește în special cînd, în una dintre ecuații, o necunoscută, x sau y, are coeficientul 1. Luăm, de exemplu, sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x - y + 2}{6} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{x + 2y + 2}{4} - \dfrac{11}{12}; \\ \dfrac{7 - x}{2} + \dfrac{6 - y}{5} = \dfrac{x + y + 4}{10} + 1. \end{cases}$$

Procedăm cu prima ecuație cum s-a arătat la §78 și obținem ecuația $x + 4y = 9$; procedăm la fel cu ecuația a doua și obținem: $2x + y = 11$. Sub forma redusă, sistemul este:

$$\begin{cases} x + 4y = 9; \\ 2x + y = 11. \end{cases}$$

Se poate folosi metoda substituţiei, scoţînd x din ecuaţia întîi, sau y din ecuaţia a doua. Totuşi, metoda reducerii convine mai bine; înmulţim prima ecuaţie cu -2 şi o adunăm cu a doua; obţinem $-7y = -7$; $y = 1$; apoi prima ecuaţie dă $x = 5$.

84. **Probleme care se rezolvă cu ajutorul sistemelor de ecuaţii.** Aceste probleme se deosebesc de problemele care duc la o ecuaţie cu o singură necunoscută numai prin faptul că ele conţin două necunoscute. Vom arăta aceasta prin exemple.

Un bloc de locuinţe muncitoreşti are 30 *de apartamente, unele de cîte trei camere, altele de cîte două camere. În total sînt* 78 *de camere de locuit* (celelalte încăperi nu se socotesc). *Cîte apartamente de fiecare fel are blocul?*

Rezolvare. Notăm cu x numărul apartamentelor de cîte trei camere şi cu y numărul apartamentelor de cîte două camere. În total sînt 30 de apartamente, deci: $x + y = 30$.

Numărul de camere din cele x apartamente... $3x$;
" " " " y " ... $2y$.
Numărul total de camere din tot blocul... $3x+2y$.
Se dă că blocul are 78 de camere, deci:

$$3x + 2y = 78.$$

Am format sistemul de ecuaţii

$$x + y = 30; \quad 3x + 2y = 78.$$

Soluţia lui este: $x = 18$; $y = 12$.

Răspuns. Blocul are 18 apartamente de cîte trei camere şi 12 apartamente de cîte două camere.

Proba. Numărul total de apartamente din tot blocul este $18 + 12 = 30$, aşa cum s-a dat. Cele 18 apartamente de cîte 3 camere au $3 \cdot 18 = 54$ de camere; cele 12 aparta-

mente de cîte două camere au $2 \cdot 12 = 24$ de camere; în total sînt $54 + 24 = 78$ de camere, aşa cum s-a dat.

Observare. Această problemă poate fi rezolvată şi cu ajutorul unei singure ecuaţii. Notăm cu x numărul apartamentelor mai mari; atunci numărul apartamentelor mai mici va fi: $30 - x$.
Numărul camerelor din apartamentele de cîte 3 camere: $3x$;
" " " " " " 2 " : $2(30-x)$.
În total, sînt 78 de camere, deci: (*a*) $3x + 2(30-x) = 78$.

Această ecuaţie dă $x = 18$. Sînt 18 apartamente de cîte 3 camere. Numărul apartamentelor de cîte două camere este: $30 - 18 = 12$.

Această cale de a rezolva problema nu este cu totul diferită de cea precedentă. Să rezolvăm sistemul de mai sus prin metoda substituţiei. Scoatem y din prima ecuaţie, $y = 30 - x$, şi-l introducem în ecuaţia a doua. Obţinem:

$$3x + 2(30 - x) = 78,$$ adică tocmai ecuaţia (*a*).

De fapt, problema aceasta este o problemă cu două necunoscute. Am redus-o la o problemă cu o singură necunoscută prin faptul că, în loc să introducem a doua necunoscută, y, pentru numărul apartamentelor de cîte două camere, am spus că numărul acestor apartamente este $30 - x$. În felul acesta, necunoscuta y a fost eliminată de la început.

2) *Un camion a transportat un număr de saci cu grîu. Şoferul îşi face socoteala următoare: dacă iau de fiecare dată cu* 10 *saci mai mult, fac cu două drumuri mai puţin; dacă iau de fiecare dată cîte* 6 *saci mai puţin, trebuie să fac cu două drumuri mai mult. Cîţi saci a luat de fiecare dată şi cîte drumuri a făcut?*

Între mărimile care intervin în problemă, există relaţia: (numărul sacilor pe care-i ia de fiecare dată) $\times$ (numărul drumurilor) $=$ (numă-

rul total de saci). Pentru a putea pune problema în ecuaţie, ne ajutăm de schema următoare:

	Cîţi saci ia de fiecare dată	*Cîte drumuri face*	*Cîţi saci transportă în total*
În realitate	x	y	xy
În cazul I	$x+10$	$y-2$	$(x+10)(y-2)$
În cazul II	$x-6$	$y+2$	$(x-6)(y+2)$.

Numărul total de saci transportaţi este mereu acelaşi, deci expresiile din coloana a treia trebuie să fie egale între ele. Scriem că expresia a doua şi a treia sînt egale cu prima:

$$(x+10)(y-2)=xy;$$
$$(x-6)(y+2)=xy.$$

Rezolvăm acest sistem şi obţinem: $x=30$; $y=8$.

Răspuns. Şoferul a făcut 8 drumuri şi a luat de fiecare dată cîte 30 de saci.

85. **Rezolvarea problemelor pe cale algebrică şi pe cale aritmetică.** În aritmetică se folosesc la rezolvarea problemelor metode diferite, pe cînd în algebră, toate problemele acestea se rezolvă prin aceeaşi metodă, cu ajutorul ecuaţiilor. Pentru a explica acest lucru mai bine, considerăm problemele următoare:

1) O marfă oarecare se împachetează în lăzi mari şi mici. O ladă mare şi una mică conţin împreună 30 kg. Trei lăzi mari şi două lăzi mici conţin împreună 78 kg. Cîte kilograme conţine o ladă de fiecare fel?

Un bloc de locuinţe muncitoreşti are 30 de apartamente, unele de cîte trei camere, altele de cîte două camere. În total sînt 78 de camere de locuit. Cîte apartamente de fiecare fel are blocul?

Notăm cu x numărul care arată cîte kilograme conține o ladă mare, și cu y numărul care arată cîte kilograme conține o ladă mică. Obținem sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 30; \\ 3x + 2y = 78. \end{cases} \left| \begin{matrix} 2 \\ \end{matrix} \right.$$

Rezolvăm sistemul prin metoda reducerii. Înmulțim prima ecuație cu 2:

$$(a) \quad \begin{cases} 2x + 2y = 60; \\ 3x + 2y = 78. \end{cases}$$

Scădem prima ecuație dintr-a doua și obținem $x = 18$. În aritmetică, o astfel de problemă se rezolvă prin „metoda aducerii la același termen de comparație".

1 ladă mare și 1 ladă mică conțin 30 kg;
(b) 2 lăzi mari și 2 lăzi mici conțin 60 kg;
3 lăzi mari și 2 lăzi mici conțin 78 kg.

Să punem față în față felul în care se rezolvă acest sistem și cum se rezolvă problema în aritmetică.

$x + y = 30$... lada mare și lada mică conțin 30 kg;
$3x + 2y = 78$... 3 lăzi mari și 2 lăzi mici conțin 78 kg.

Înmulțim prima ecuație cu 2... Cît cîntăresc de două ori mai multe lăzi?

$2x + 2y = 60$... 2 lăzi mari și 2 lăzi mici conțin 60 kg;
$3x + 2y = 78$... 3 lăzi mari și 2 lăzi mici conțin 78 kg.
Scădem prima ecuație din a doua... Comparăm rîndurile.
$x = 18$................. o ladă mare conține 18 kg.

Asemănarea este desăvîrșită. Aceasta se datorește faptului că aici mărimile din prima ecuație sînt de același fel cu cele din ecuația a doua. Ecuațiile exprimă lucrul următor:

$$x \text{ kg} + y \text{ kg} = 30 \text{ kg};$$
$$3x \text{ kg} + 2y \text{ kg} = 78 \text{ kg}.$$

Avem peste tot numai kilograme. Factorul 2 care intervine este înmulțitor, deci număr *abstract*.

Să trecem la problema a doua. Ea a fost rezolvată la § 84. Sistemul de ecuații este același, soluția este tot aceeași. Totuși, în aritmetică, o asemenea problemă se rezolvă pe

altă cale, prin „metoda ipotezelor". Care este cauza acestei nepotriviri? În cazul problemei a doua, ecuațiile exprimă lucrul următor:

x apartamente I + y apartamente II = 30 apartamente;
$3x$ camere + $2y$ camere = 78 camere.

Mărimile din ecuația a doua nu sînt de același fel cu cele din prima ecuație. Numerele din prima ecuație reprezintă apartamente, iar cele din ecuația a doua reprezintă camere. Semnificația concretă a sistemului (a) este deci:

$2x + 2y = 60$... $2x$ apartamente + $2y$ apartamente = = 60 apartamente;

$3x + 2y = 78$... $3x$ camere + $2y$ camere = 78 camere.

Faptul că în ambele ecuații apare același termen ($2y$) nu folosește la nimic. Scăderea n-are în acest caz nici un sens. Ar trebui să scădem 60 de apartamente din 78 de camere.

Pentru ca folosirea factorului 2 să aibă sens, lucrurile trebuie interpretate altfel. Să presupunem că un apartament, indiferent de ce fel, ar avea două camere. Atunci x apartamente ar avea $2x$ camere, y apartamente ar avea $2y$ camere și sistemul (a) capătă interpretarea următoare:

$2x + 2y = 60$... $2x$ camere + $2y$ camere = 60 camere;
$3x + 2y = 78$... $3x$ camere + $2y$ camere = 78 camere.

Acum scăderea are sens. Așa se procedează în aritmetică, la „Metoda ipotezelor". De fapt nu se înmulțește cu 2, ci numărul 2 (mai precis numărul concret 2 camere) se înmulțește cu numerele abstracte x și y.

Așadar, în aritmetică, în judecățile pe care le facem, ținem seamă de semnificația concretă a numerelor, de aceea aceste două probleme se rezolvă pe căi deosebite. În algebră, se lucrează cu numere abstracte, ceea ce simplifică mult lucrurile. Unul din foloasele algebrei constă, deci, în faptul că se lucrează cu numere abstracte.

EXERCIȚII

1. Se dă ecuația $3x + 2y = 9$. Să se dea lui x diferite valori, de exemplu: -2, -1, 0, 1,2,... și să se afle valorile corespunzătoare ale lui y. Să se dea apoi lui y diferite valori și să se afle

valorile corespunzătoare ale lui x. Se vor face două tabele, ca cele de la § 76.

2. Se dă ecuația $5x - 3y = 12$. Să se dea lui x o valoare oarecare, de exemplu $x = 4$ și să se afle valoarea corespunzătoare a lui y. Să se introducă apoi în ecuație valoarea aflată pentru y și să se afle valoarea corespunzătoare a lui x. Ce se constată? Să se refacă lucrarea, dînd lui x alte valori.

3. Se dă ecuația: $\frac{x+y}{2} - \frac{x}{3} = 1 + \frac{x-1}{4} + \frac{x+y}{6}$.

a) Să se dea lui x valoarea $x = 1$, și să se afle valoarea corespunzătoare a lui y; *b*) să se dea lui y valoarea $y = 3$ și să se afle valoarea corespunzătoare a lui x.

4. Elevul A a cumpărat 5 caiete și 3 creioane și a plătit 26 de lei. În drum spre casă, el caută să afle cu cît s-a socotit un caiet și cu cît s-a socotit un creion. Va putea el să afle răspunsul? Elevul B a cumpărat 4 caiete și 2 creioane și a plătit 20 de lei. În drum spre casă, el își pune aceeași problemă. Va putea s-o rezolve? Cei doi elevi se întîlnesc și își spun unul altuia ce au cumpărat. Acum vor putea afla cît costă un creion și cît costă un caiet?

Să se rezolve prin metoda substituției:

5. $\begin{cases} 3x - 2y = 19; \\ y = x - 7. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x = -4y + 3; \\ 2x + 5y = -1. \end{cases}$

Primul număr reprezintă valoarea lui x, iar al doilea, a lui y. **5.** 5; $-$ 2. **6.** $-6\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{3}$.

7. $\begin{cases} y = 2x - 1; \\ y = x + 5. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x + 3y = 25; \\ 2y + x = 15. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 6y + 1; \\ x = 3y + 3. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x + 5y = 1; \\ 4x + 5y = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x = y; \\ 5x - 3y = 7. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x + 11y = 0; \\ 3x - 2y = 15. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y = 5x + 2; \\ 2y = 3x - 7. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x = 3y - 1; \\ y = 2x + 1. \end{cases}$

Să se rezolve prin metoda reducerii:

15. $\begin{cases} 3x + 2y = 16; \\ 5x - 2y = 32. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 4x + y = -7; \\ -4x + 3y = 11. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x + 7y = -1; \\ 6x + 7y = 3. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 3x + 8y = 10; \\ 3x + 5y = 8. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 11y = 32; \\ 3x + 8y = -27 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 6x + y = 40; \\ 5x - 2y = 39. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 18x + 13y = 5; \\ 16x + 10y = 23. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 28x - 48y = -61; \\ 108x + 96y = -1. \end{cases}$

---

7. 6; 11. **8.** −5; 10. **9.** 5; $\frac{2}{3}$. **10.** $-\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$. **11.** −7; −14. **12.** $4\frac{5}{7}$; $-\frac{3}{7}$. **13.** $-1\frac{4}{7}$; $-5\frac{6}{7}$. **14.** $-\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$. **15.** 6; −1. **16.** −2; 1. **17.** 4; −3. **18.** $1\frac{5}{9}$; $\frac{2}{3}$. **19.** −1; −3. **20.** 7; −2. **21.** $8\frac{25}{28}$; $-11\frac{13}{14}$. **22.** $-\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$.

23. $\begin{cases} 15x + 7y = 23; \\ 20x + 17y = 23. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} 11x + 24y = 66; \\ 7x - 36y = 42. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 7x + 3y = -26; \\ 5x - 4y = -18. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} 11x + 12y = 35; \\ 12x + 13y = 38. \end{cases}$

Să se rezolve sistemele următoare:

27. $\begin{cases} 2(x + 2y) - 3(x + 3y) = 5; \\ x = 1 - 2y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x - 3(y - 2) + 2(x - 2) = 3; \\ 3x - 5y = -1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + y = 8; \\ 2(x + y - 1) - 5(x - y + 1) = 7. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3(x - 2y + 1) + 2(x + 3y - 2) = 9; \\ 4(x + y - 2) - 2(2x - 2y + 3) = 2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 14; \\ 4x - 3(2x + y - 1) = 2(-x + y) + 8. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + 3(y + 1) = 3; \\ 2(x + 1) - 5y = x + y + 2. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 2x - 3(x - 3y + 2) = 4(x - y + 1) - 49; \\ x(y + 1) = y(x - 1) - 3. \end{cases}$

---

23. 2; −1. **24.** 6; 0. **25.** $-3\frac{29}{43}$; $-\frac{4}{43}$. **26.** 1; 2. **27.** 5; − 2. **28.** $\frac{4}{3}$; 1. **29.** $4\frac{1}{5}$; $3\frac{4}{5}$. **30.** 2; 2. **31.** 3; −1. **32.** 0; 0. **33.** 0; −3.

34. $\begin{cases}(4x-3)(3y-2)-(6y-1)(2x+1)+11(x+y)=0;\\(x+1)(y+1)=xy+8.\end{cases}$

35. $\begin{cases}(x+3)(x-2)+(y+2)(y-2)=x^2+y(y+2)+2;\\(x+1)^2+(y-2)^2=x^2+y^2+4(x-y)+1.\end{cases}$

36. $\begin{cases}(x+y+1)(x+y-1)+3x-y=(x+y)^2-18;\\(x+1)^2-(2y-1)^2=(x+2y)(x-2y)+3(x+y)+7.\end{cases}$

37. $\begin{cases}x+\frac{y}{3}=6;\\\frac{x}{2}+y=8.\end{cases}$

38. $\begin{cases}\frac{x-1}{2}-y=5;\\x+\frac{1-y}{4}=6\end{cases}$

39. $\begin{cases}\frac{x+y}{4}-\frac{x-3}{6}=y;\\\frac{x+1}{3}-\frac{x-y}{2}=\frac{y}{3}.\end{cases}$

40. $\begin{cases}\frac{x+2y-3}{2}=\frac{2x+y+5}{3};\\\frac{y-x}{7}=\frac{x+y+3}{4}.\end{cases}$

41. $\begin{cases}x+\frac{x+y}{3}=y-\frac{x+y+2}{2};\\x-\frac{x-y}{3}=y+\frac{x-y+4}{2}.\end{cases}$

---

34. $2\frac{1}{3}$; $4\frac{2}{3}$. **35.** 2; —5. **36.** —5; 2. **37.** 4; 6. **38.** 5; —3. **39.** 3; 1. **40.** —3; 4. **41.** —1,8; —13,8.

42. $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{6}+\dfrac{2y+1}{4}=\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{y+1}{12}; \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{2y-1}{2}. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y}{8}=\dfrac{2x-1}{4}+\dfrac{6-y}{8}; \\ \dfrac{y-3}{3}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{2y-5}{6}+\dfrac{2x-1}{3}. \end{cases}$

44. $\begin{cases} 2(x-y)=3(x+y-6); \\ \dfrac{2x-y}{3}-\dfrac{x-3y}{2}=\dfrac{2x+3y+1}{4}. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dfrac{3(x-y)}{8}-\dfrac{x+y-2}{6}=\dfrac{2(x-1)}{3}; \\ (x-1)(y+2)=(x+3)(y-1). \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{x-y}-\dfrac{2x-y+1}{2x-2y}+\dfrac{x+2y-1}{4x-4y}=\dfrac{15}{2}; \\ 3x-2y=7. \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dfrac{2}{3(x-1)}-\dfrac{3}{2(y+2)}+\dfrac{1}{(x-1)(y+2)}=0; \\ (x+2)(y-1)-(x-3)(y+1)+3(x+y)=12. \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x+3y=8a; \\ y=x+a. \end{cases}$ 49. $\begin{cases} x+2y=2b; \\ x=y-b. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x+y=5m; \\ 2x+5y=19m. \end{cases}$ 51. $\begin{cases} 2x-y=p; \\ x-2y=-p. \end{cases}$

---

42. 0; 0. **43.** $x=1$; y = arbitrar. **44.** 3; 3. **45.** 1; 1. **46.** 5; 4. **47.** 3; 1. **48.** a; $2a$. **49.** 0; b. **50.** $2m$; $3m$. **51.** p; p.

52. $\begin{cases} x + y = 2a; \\ x - y = 2b. \end{cases}$

53. $\begin{cases} x + y = a + b; \\ x - y = a - b. \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2x+y=4a+5b; \\ x+2y=5a+4b. \end{cases}$

55. $\begin{cases} x + y = 2a + b; \\ 2x - y = a - b. \end{cases}$

56. $\begin{cases} 2x + y = 7; \\ 4x + 2y = 14. \end{cases}$

57. $\begin{cases} y = x + 1; \\ y = x + 3. \end{cases}$

58. $\begin{cases} 2x + 6y = 10; \\ 3x + 9y = 15. \end{cases}$

59. $\begin{cases} 2(x-y) - 3(x + y) = x + y - 8; \\ 3(x - 2) + 2(y - 2) = 2(x + 1) - y + 12. \end{cases}$

60. În sistemele următoare, să se determine valoarea lui m astfel ca sistemul să fie: *a*) nedeterminat; *b*) incompatibil.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 8; \\ 4x + 10y = m; \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 4x + 12y = 8; \\ 3x + 9y = m. \end{cases}$

PROBLEME

1. Se consideră două numere: *a*) Dacă mărim unul din ele cu 38 și celălalt cu 53, suma lor devine 120. Să se afle suma celor două numere. Să se dea exemple; *b*) Dacă micșorăm pe cel mai mare cu 6 și mărim pe cel mai mic cu 15, diferența lor devine 41. Se cere diferența dintre cele două numere. Să se dea exemple.

---

52. $a + b$; $a - b$. **53.** a; b. **54.** $a + 2b$; $2a + b$. **55.** a; $a + b$. **56.** Nedet. **57.** Incomp. **58.** Nedet. **59.** Incompatibil. **60.** *a)* $m = 16$, nedet.; $m \neq 16$, incomp.; *b)* $m = 6$, nedet.; $m \neq 6$, incomp. **1.** *a)* 29; *b)* 62.

2. Se consideră două numere: *a*) Dacă înmulţim unul din ele cu 5 şi pe celălalt cu 3, produsul lor devine 165. Se cere produsul celor două numere; *b*) Dacă împărţim unul din ele la 2 şi pe celălalt la 3, produsul lor devine 180. Se cere produsul celor două numere. Să se dea exemple.

3. Raportul dintre jumătatea unui număr şi treimea unui alt număr este *a*. Să se afle raportul dintre cele două numere. Exemple.

4. 18% dintr-un număr este egal cu 15% dintr-un alt număr. Care este raportul dintre aceste numere? Exemple.

5. Dacă dublăm baza unui dreptunghi şi mărim înălţimea sa de 3 ori, obţinem un dreptunghi cu aria de 288 m². Să se afle aria dreptunghiului. Exemple.

6. Dacă mărim o latură a unui triunghi cu 5 cm, o altă latură cu 6 cm şi latura a treia cu 7 cm, perimetrul triunghiului devine de 40 cm. Să se afle perimetrul triunghiului. Exemple.

7. Avem două numere. Dacă le mărim pe amîndouă cu 2, produsul lor creşte cu 30. Ce putem spune despre aceste numere? Ce schimbare suferă produsul lor, dacă le micşorăm pe amîndouă cu 2?

8. Suma a două numere este 19. Triplul primului număr, adunat cu numărul al doilea, dă suma 35. Să se afle cele două numere.

9. Suma a două numere este 22. Dacă scădem din primul număr dublul numărului al doilea obţinem diferenţa 1. Să se afle cele două numere.

---

2. *a)* 11; *b)* 1 080. **3.** $\frac{2a}{3}$. **4.** $\frac{5}{6}$. **5.** 48 m². **6.** 22 cm. **7.** Suma lor este 13; produsul scade cu 22. **8.** 8; 11. **9.** 15; 7.

10. Diferența a două numere este 37. Dacă înmulțim primul număr cu 5, al doilea cu 2 și adunăm rezultatele, obținem suma 130. Să se afle cele două numere.

11. Un număr este cu 8 mai mare decît altul. Numărul mai mare este cu 1 mai mic decît dublul numărului mai mic. Să se afle cele două numere.

12. Avem două numere. Dacă înmulțim primul număr cu 2, al doilea cu 3 și adunăm produsele, obținem rezultatul 45. Dacă înmulțim primul cu 5, al doilea cu 2, și scădem al doilea produs din primul, obținem diferența 8. Să se afle cele două numere.

13. Avem două numere. Sfertul primului număr este egal cu treimea numărului al doilea. Media aritmetică a celor două numere este 21. Să se afle cele două numere.

14. Avem două numere. Dacă adunăm sfertul primului număr cu treimea numărului al doilea, obținem 8; dacă din jumătatea primului număr scădem treimea numărului al doilea, obținem diferența 1. Să se afle cele două numere.

15. Diferența a două numere este 351. Știind că $\frac{3}{8}$ din unul fac cît 40% din celălalt, să se afle cele două numere.

16. Suma a două numere este 2 513. 4% din unul din ele fac cît 3% din celălalt. Să se afle cele două numere.

---

10. $29\frac{1}{7}$; $-7\frac{6}{7}$. **11.** 9; 17. **12.** 6; 11. **13.** 24; 18. **14.** 12; 15. **15.** 5 616; 5 265. **16.** 1 077; 1 436.

17. Suma a două numere este 950. 4% din primul număr și 5% din al doilea număr fac împreună 44. Să se afle cele două numere.

18. 5 caiete și 2 creioane costă 14 lei. 10 caiete și un creion costă 20,50 lei. Cît costă un caiet și cît costă un creion?

19. Din totalul investițiilor ce s-au făcut în anul 1960, o parte a fost destinată industriei și o altă parte agriculturii. Fiecare dintre aceste părți se exprimă printr-un număr de procente. Să se afle aceste două numere, știind că pentru industrie și agricultură împreună s-au prevăzut 66,6%, iar pentru industrie cu 36% mai mult decît pentru agricultură.

20. Pentru 3 kg de zahăr și 5 kg de marmeladă s-a plătit 57 de lei. 4 kg de zahăr costă cît 6 kg de marmeladă. Cît costă 1 kg de zahăr, cît costă 1 kg de marmeladă?

21. 4 vițel și 5 vaci mănîncă într-o zi 69 kg de fîn, 2 vițel și o vacă mănîncă într-o zi 21 kg de fîn. Cîte kilograme de fîn se dau pe zi unui vițel și cîte unei vaci?

22. Un camion poate transporta de 3 ori mai mult decît o căruță și încă 100 kg. Trei camioane și 10 căruțe transportă 15 500 kg. Cît poate transporta un camion și cît o căruță?

23. 12 farfurii mari și 12 farfurii mici costă 360 de lei. Două farfurii mari costă cît 3 farfurii mici. Cît costă o farfurie de fiecare fel?

---

17. 350; 600. **18.** 1,80 lei; 2,50 lei. **19.** 51,3%; 15,3%. **20.** 9 lei; 6 lei. **21.** 6 kg; 9 kg. **22.** 2 500 kg; 800 kg. **23.** 18 lei; 12 lei.

24. Un caiet de hîrtie velină costă cu 0,75 lei mai mult decît un caiet de hîrtie obişnuită. 4 caiete de hîrtie velină şi 3 caiete obişnuite costă 18,75 lei. Cît costă un caiet de fiecare fel?

25. La o gospodărie agricolă de stat sînt găini şi iepuri. În total sînt 431 de capete şi 1 008 picioare. Cîte găini şi cîţi iepuri sînt?

26. Un bloc de locuinţe muncitoreşti urma să coste 3 500 000 lei. Prin efortul muncitorilor şi tehnicienilor s-a realizat o economie de 10% la materiale şi de 15% la manoperă, obţinîndu-se o economie de 371 000 lei. Cît era prevăzut pentru materiale şi cît pentru manoperă?

27. Un muncitor şi-a strîns suma de 1 100 lei pentru un costum de haine şi o pereche de pantofi. În urma unei reduceri de preţuri, costumul pe care şi-l alesese s-a ieftinit cu 15%, iar pantofii cu 10%, şi, din cauza aceasta, i-au rămas 156 lei. Cît a costat costumul de haine şi cît au costat pantofii înainte şi după ieftinire?

28. Muncitorii, tehnicienii şi inginerii de la două uzine şi-au luat angajamentul să realizeze într-un an economii în valoare totală de 5,6 milioane lei. În realitate, prima dintre aceste uzine a realizat de 2,5 ori mai mult, iar a doua — de 3,2 ori mai mult şi cele două uzine au realizat astfel în total economii în valoare de 16,1 milioane lei. Ce economii şi-a luat angajamentul să realizeze fiecare dintre aceste uzine?

---

24. 2,25 lei; 3 lei. **25.** 358 găini; 73 iepuri. **26.** 3 080 000 lei; 420 000 lei. **27.** 920 lei; 180 lei; 782 lei; 162 lei. **28.** 3 milioane; 2,6 milioane.

29. O sumă de 391 de lei se plătește cu 89 de bancnote de 3 lei și de 5 lei. Cîte bancnote din fiecare fel s-au dat?

30. O sticlă de un litru cu vin costă 17,60 lei. Un litru de vin costă cît 10 sticle goale. Cît costă un litru de vin și cît costă sticla?

31. Deasupra unei cisterne de 15 000 l sînt două robinete A și B. Le deschidem pe amîndouă și le lăsăm deschise timp de 20 de minute. Dacă după aceasta închidem robinetul A, robinetul B umple restul din cisternă în 8 minute; dacă însă închidem robinetul B, robinetul A umple restul în 5 minute. Să se afle debitul celor două robinete.

32. Un bidon plin cu ulei cîntărește $5\frac{1}{2}$ kg. Același bidon, umplut cu ulei numai pe jumătate, cîntărește 3 kg. Cît cîntărește bidonul gol și cît ulei încape în el?

33. Doi colegi, A și B, vor să cumpere un obiect care costă 65 de lei. A spune lui B: „Împrumută-mi jumătate din banii tăi, ca să am tocmai cît trebuie". B răspunde: „Împrumută-mi tu mie o treime din banii tăi și atunci voi avea eu tocmai cît trebuie". Cît are fiecare din ei?

34. Suma a două numere este s, iar diferența lor este d. Să se afle cele două numere. Să se exprime rezultatul în cuvinte.

35. Suma a două numere este s, iar raportul lor este k. Să se afle cele două numere. Să se facă legătura între formulele care se obțin pentru x și y

---

29. 27; 62. **30.** 16 lei; 1,60 lei. **31.** 400 litri pe minut; 250 litri pe minut. **32.** 0,5 kg; 5 kg. **33.** 39 lei; 52 lei. **34.** $\frac{s+d}{2}$; $\frac{s-d}{2}$.

și metoda care se folosește în aritmetică pentru a afla două numere cînd se cunoaște suma și raportul lor.

36. Aceeași chestiune, cînd se cunoaște diferența (d) și raportul (k) a două numere.

37. După recensămîntul din 1956, populația activă din R.P.R. era de 10,5 milioane de locuitori. Raportul dintre numărul celor din mediul urban și al celor din mediul rural era $\frac{9}{26}$. Cîți locuitori din R.P.R. munceau în mediul urban și cîți în mediul rural?

38. În anii 1938 și 1960 s-au extras în total în țara noastră 10,8 milioane tone cărbune brut. Jumătate din cantitatea de cărbune extrasă în 1938 este egală cu 17,5% din cea extrasă în 1960. Cîte milioane tone de cărbune s-au extras în fiecare din acești ani? Cu cît s-a extras mai mult cărbune în 1960 decît în 1938?

39. Raportul dintre producția de zahăr din țara noastră în anii 1938 și 1957 este $\frac{19}{37}$.

În 1957 s-au produs cu 90 mii tone de zahăr mai mult ca în 1938. Cît zahăr s-a produs în fiecare din acești ani?

40. Suma a două numere este 85. Dacă împărțim unul prin celălalt, obținem cîtul 13 și restul 1. Să se afle cele două numere.

41. Un număr împărțit prin altul dă cîtul 4 și restul 1. Dacă mărim împărțitorul cu 3, cîtul devine 3 și restul 6. Să se afle cele două numere.

---

35. $\frac{s}{k+1}$; $\frac{ks}{k+1}$. **36.** $\frac{d}{k-1}$; $\frac{dk}{k-1}$. **37.** 2,7; 7,8 milioane. **38.** 2,8 milioane tone; 8 milioane tone; cu 5,2 milioane tone mai mult. **39.** 95 mii tone; 185 mii tone; **40.** 79; 6. **41.** 57; 14.

42. Un atelier de confecții are o bucată de stofă de palton. Dacă se fac din toată stofa paltoane bărbătești, ies 6 paltoane și rămîne o bucată de 2,40 m. Pentru un palton de copil trebuie cu 35 cm mai puțin decît pentru un palton bărbătesc. Dacă se fac numai paltoane de copil, ies 8 paltoane și nu rămîne nimic. De cîți metri este bucata de stofă și cîtă stofă trebuie pentru un palton bărbătesc?

43. Într-o tabără de pionieri sînt de 3 ori mai mulți băieți decît fete. Mai vin 18 băieți și 18 fete și atunci sînt în tabără de două ori mai mulți băieți decît fete. Cîți băieți și cîte fete au fost?

44. Să se afle două numere, știind că: dacă adăugăm la numărul mai mare 17, el devine dublul numărului mai mic, iar dacă adăugăm același număr la numărul mai mic, ele devin egale.

45. Un drumeț spune: „Mai am înaintea mea un drum de 3 ori mai lung decît drumul pe care l-am făcut. Dacă mai fac 10 km, ajung la jumătatea drumului". Cîți kilometri a parcurs drumețul și cîți kilometri trebuie să mai parcurgă el de acum înainte?

46. *A* spune lui *B*: „Dă-mi 6 nuci ca să am cît tine!" *B* răspunde: „Dă-mi tu mie 6 nuci și voi avea de două ori mai multe nuci ca tine!" Cîte nuci are fiecare din ei?

47. Într-o clasă se află un număr de elevi și un număr de bănci. Dacă elevii se așază cîte doi într-o bancă, 5 elevi rămîn fără loc. Dacă se așază cîte 3 într-o bancă, rămîn 4 bănci goale. Cîți elevi și cîte bănci sînt în clasă?

---

42. 18 m; 2,60 m. **43.** 18; 54. **44.** 51; 34. **45.** 10 km; 30 km. **46.** 42; 30. **47.** 17; 39.

48. La cooperativă există pînză de 9 lei metrul și de 11 lei metrul. O femeie se duce să cumpere o cantitate de pînză și își face socoteala următoare: dacă ia din pînza mai scumpă, nu-i ajung 15 lei; dacă ia din pînza mai ieftină, îi rămîn 15 lei. Cîți metri de pînză voia să cumpere femeia și cîți bani avea?

49. O echipă de muncitori trebuie să taie într-un număr de zile un anumit număr de copaci. Șeful echipei face socoteala următoare: dacă tăiem cîte 40 de copaci pe zi, rămînem cu 20 de copaci în urmă față de plan; dacă tăiem cîte 50 de copaci pe zi, depășim planul cu 100 de copaci. În cîte zile trebuie făcută lucrarea și cîți copaci trebuie să fie tăiați, după plan?

50. Să se afle două numere, știind că au însușirile următoare: dacă mărim primul cu 1 și al doilea cu 2, produsul crește cu 18; dacă mărim primul cu 2 și al doilea cu 1, produsul crește cu 19.

51. În magazia unei cantine se găsește o cantitate de zahăr, care este planificată pentru un număr de zile. Dacă s-ar consuma în fiecare zi cîte 6 kg mai mult, provizia s-ar termina cu o zi mai devreme; dacă s-ar consuma în fiecare zi cîte 6 kg mai puțin, provizia ar ține cu două zile mai mult. Cît zahăr a fost planificat să fie consumat în fiecare zi și pentru cîte zile trebuia să ajungă zahărul din magazie?

52. Un muncitor trebuie să facă un număr de piese într-un timp dat. Dacă face cîte 5 piese mai mult pe zi, el termină lucrarea cu o zi înainte de termen; dacă face cîte 3 piese pe zi mai puțin,

---

48. 180 lei; 15 m. 49. 12 zile; 500 copaci. 50. 5; 6. 51. 18 kg; 4 zile.

el termină lucrarea cu o zi după termen. Cîte piese trebuie să facă pe zi și în cîte zile urma să termine lucrarea?

53. *a*) Într-un dreptunghi, diferența laturilor este de 16 m, iar perimetrul este de 112 m. Se cer laturile dreptunghiului. *b*) Aceeași problemă, dacă diferența laturilor este de 20 cm, iar perimetrul este de 36 cm.

54. *a*) Într-un trapez linia mijlocie este de 17 m, iar diferența dintre baze este de 6 m. Se cer bazele. *b*) Aceeași problemă dacă linia mijlocie este de 25 m, iar diferența bazelor este de 60 m.

55. Două vase conțin împreună 24 l de apă. Turnăm din primul vas în al doilea o treime din conținutul primului vas, apoi turnăm din vasul al doilea în primul o treime din conținutul vasului al doilea. După aceste două operații, vasele conțin cantități egale de apă. Cîtă apă era la început în fiecare vas?

56. *a*) Doi copii, *A* și *B*, au împreună 36 de nuci. *A* dă lui *B* jumătate din cîte nuci are *B*, apoi *B* dă lui *A* jumătate din cîte nuci i-au rămas lui *A*. După aceste două operații, cei doi copii au același număr de nuci. Cîte nuci a avut la început fiecare copil? *b*) Aceeași problemă, dacă doi copii au avut împreună 182 de nuci și operația se face de 4 ori, pînă cînd numărul nucilor se egalează.

57. Într-o familie, soțul și soția cîștigau împreună 1 750 lei pe lună. Ulterior, salariul soției s-a mărit cu 20%, iar al soțului cu 10% și, ca

---

52. 15 piese; 4 zile. **53.** *a)* 36 m; 20 m; *b)* imposibil. **54.** *a)* 20 m; 14 m; *b)* imposibil. **55.** 9 l; 15 l. **56.** *a)* 20; 16; *b)* 94; 68.

urmare a acestui fapt, salariul soției a devenit cu 30 lei mai mare ca al soțului. Să se afle salariul fiecăruia dintre ei înainte și după mărirea salariilor.

58. Într-un triunghi ABC, latura AC este cu 5 cm mai lungă decît AB, iar $BC = 10$ cm. Pe latura AB luăm un segment $AM = 1$ cm, ducem prin M o paralelă la BC și notăm cu N punctul ei de intersecție cu AC. Perimetrul triunghiului AMN este de 7 cm. Se cer laturile triunghiului ABC.

59. Într-un trapez $ABCD$ cu baza mare AB și baza mică CD, latura $AD = 7$ cm, iar linia mijlocie este de 8,5 cm. Laturile neparalelele se taie în E, iar $DE = 56$ cm. Se cer bazele trapezului.

60. Perimetrul unui dreptunghi este de 30 cm. Dacă-i mărim baza cu 3 cm și înălțimea cu 2 cm, aria sa crește cu 44 cm². Se cer laturile dreptunghiului.

61. Dacă mărim baza unui dreptunghi cu 2 m și înălțimea cu 1 m, aria sa crește cu 25 m²; dacă mărim baza cu 1 m și înălțimea cu 2 m, aria crește cu 27 m². Se cer dimensiunile dreptunghiului.

62. Un biciclist parcurge un drum de 81 km în două etape. În prima etapă, el merge cu o viteză de 18 km pe oră, iar în etapa a doua, de 15 km pe oră. Prima etapă durează cu o oră mai puțin decît a doua. De cîți kilometri este fiecare etapă?

63. O mașină a parcurs 255 km în $5\frac{3}{4}$ ore. O parte din drum l-a parcurs cu o viteză de 40 km pe oră, iar

---

57. 850 lei; 900 lei. **58.** $AB = 3$ cm; $AC = 8$ cm. **59.** 8 cm; 9 cm. **60.** 7 cm; 8 cm. **61.** 9 m; 7 m. **62.** 36 km; 45 km.

restul cu o viteză de 50 km pe oră. Cît timp a mers maşina cu 40 km pe oră şi cît timp cu 50 km pe oră?

64. Distanţa dintre două oraşe, *A* şi *B*, este de 48 km. Un biciclist pleacă de la *A* spre *B* şi în acelaşi moment pleacă un om pe jos de la *B* spre *A*. Viteza biciclistului este de 3 ori mai mare decît a pietonului. Ei se întîlnesc după 3 ore. Să se calculeze vitezele lor.

65. Doi alergători aleargă pe o pistă circulară de 300 m, pornind din acelaşi punct. Dacă aleargă în acelaşi sens, unul din ei îl ajunge pe celălalt după 1 minut. Dacă aleargă în sens contrar ei se întîlnesc după 20 s. Să se afle vitezele celor doi alergători.

66. *a)* O fracţie este egală cu $\frac{3}{4}$. Dacă mărim numărătorul ei cu 2 şi micşorăm numitorul tot cu 2, obţinem o fracţie echiunitară. Să se afle fracţia. *b)* Aceeaşi problemă, ştiind că, dacă micşorăm numărătorul cu 1 şi mărim numitorul tot cu 1, obţinem o fracţie egală cu $\frac{2}{3}$.

67. Să se afle o fracţie care să aibă însuşirile următoare: dacă-i mărim ambii termeni cu 3, obţinem o fracţie egală cu $\frac{2}{3}$; dacă-i micşorăm ambii termeni cu 3, obţinem o fracţie egală cu $\frac{1}{2}$.

68. Într-o familie, raportul dintre salariul soţiei şi al soţului era $\frac{2}{3}$. Ulterior, salariul soţiei

---

63. $3\frac{1}{4}$ ore; $2\frac{1}{2}$ ore. **64.** 4 km/oră; 12 km/oră. **65.** 5 m/s; 10 m/s. **66.** *a)* $\frac{12}{16}$; *b)* $\frac{15}{20}$. **67.** $\frac{9}{15}$.

s-a mărit cu 150 lei, iar al soțului, cu 100 lei. Raportul dintre salariile astfel mărite este $\frac{3}{4}$. Ce salariu a avut fiecare dintre ei înainte de mărirea salariilor?

69. *a)* Avem o soluție cu o concentrație de 60%. Dacă adăugăm 50 g de acid, concentrația devine de 70%. Cît acid conține soluția și care este greutatea ei?

b) Aceleași întrebări, dacă se știe că, prin adăugarea a 70 g de apă, concentrația scade la 25%.

70. 1 kg de cafea crudă costă 92 lei, iar 1 kg de năut costă 5 lei. Cîtă cafea și cît năut trebuie să luăm, pentru a face un amestec de 20 kg, care să valoreze 48,50 lei kilogramul?

71. Avem alcool de 60° și de 90°. Cît trebuie să luăm din fiecare fel, ca să obținem 10 litri de alcool de 66°?

72. Avem două feluri de alcool. Dacă amestecăm 1 l de alcool din primul fel cu 2 l de alcool din felul al doilea, obținem un amestec de 60°. Dacă luăm, invers, 2 l din primul fel și 1 l din al doilea, obținem un amestec de 70°. Cîte grade are fiecare fel de alcool?

73. Avem două feluri de minereuri de fier, *A* și *B*. 10 t din minereul *A* și 5 t din minereul *B* dau 8,5 t de fier. Invers, 5 t din minereul *A* și 10 t din minereul *B* dau 9,5 t de fier. Cît la sută fier conține fiecare fel de minereu?

74. Densitatea aurului este de 13,6, iar a aramei de 8,7. Un aliaj de aur și aramă cîntărește

---

68. 600 lei; 900 lei. **69.** *a)* 90 g; 150 g; *b)* 30g; 50 g. **70.** 10 kg cafea; 10 kg năut. **71.** 8 l; 2 l. **72.** 50°; 80°. **73.** 50%; 70%.

150 g. Sub apă, aliajul cîntărește 138 g. Cît aur și cîtă aramă conține aliajul?

75. O pîrghie de genul întîi are o lungime de 65 cm. Ce lungime trebuie să aibă fiecare dintre brațele ei, ca ea să fie în echilibru atunci cînd la capetele ei acționează o forță de 4 kg și una de 9 kg?

76. Brațele unei pîrghii de genul întîi sînt de 30 cm și 50 cm. La capetele ei sînt două talere. În fiecare din ele s-a pus o cantitate de alice, în total 8 kg. Pentru ca pîrghia să fie în echilibru, trebuie mutat 1 kg de alice dintr-un taler în celălalt. Cîte kilograme de alice s-au pus în fiecare taler?

77. O pîrghie de genul întîi, AB, este în echilibru cînd asupra capătului A acționează o forță de 7 kg și asupra capătului B, de 5 kg. Dacă mărim prima forță cu 1 kg și micșorăm brațul OA cu 10 cm, pîrghia rămîne în echilibru. Să se afle lungimile celor două brațe.

78. Dacă mărim o catetă a unui triunghi dreptunghic cu 1 m și micșorăm cealaltă catetă cu 1 m, ipotenuza nu-și schimbă lungimea. Suma catetelor este de 7 m. Să se afle catetele triunghiului.

79. Într-un semicerc cu diametrul AB se duc două coarde MA, MB, al căror raport este $\frac{5}{12}$. Dacă mutăm punctul M pe cerc astfel ca MA să crească cu 7 cm, MB scade cu 7 cm. Se cer segmentele MA, MB, AB.

---

74. $9\frac{15}{49}$ cm³; $2\frac{34}{49}$ cm³. **75.** 45 cm; 20 cm. **76.** 2 kg; 6 kg. **77.** 130 cm; 182 cm. **78.** 3 m; 4 m. **79.** 5 cm; 12 cm; 13 cm.

80. *a)* În două pahare se găsesc 300 g de apă. Luăm cîte un sfert din conținutul fiecărui pahar și-l turnăm într-un al treilea pahar. În paharul al treilea se strîng astfel 75 g de apă. Cîtă apă a fost la început în fiecare pahar?

b) Aceeași întrebare, dacă în paharul al treilea se găsesc 80 g de apă.

CUPRINSUL

